# Stromingsleer & Transportverschijnselen
# Eindtoets

NS-265B

16 April, 13:30- 16:30

- Geen open boek tentamen.
- Een paar formules staan op pagina 4.
- Het cijfer is het aantal behaalde punten gedeeld door 10.
- Geen rekenmachine nodig.

# 1 Potentiaalstroming [30pt]

We beschouwen een potentiaalstroming met sterkte $U$ rond een bol met straal $a$. Voor deze stroming is de complexe potentiaal $w(\zeta)$ gegeven door

$$w(\zeta) = U\left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta}\right).$$

Deze stroming $w$ gaan we projecteren op het $z$-vlak met een Joukowski transformatie:

$$z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta},$$

waarbij $c > 0$. De stroming $W$ in het $z$-vlak wordt dan gegeven door

$$u - iv = \frac{dW}{dz} = \frac{dw/d\zeta}{dz/d\zeta} = \frac{u_* - iv_*}{dz/d\zeta}$$

We bekijken de situatie dat $a = 0.5c$ (dus $c > a$), en bekijken alleen de oplossingen voor $\mathrm{Im}\{\zeta\} > 0$ en $|\zeta| > a$. Deze rand van het domein is een stroomlijn in het $\zeta$-vlak.

a 6p) Schets hoe deze rand in het $\zeta$-vlak projecteert naar het $z$-vlak.

b 3p) Laat zien dat de punten $\zeta = ce^{i\gamma}$; $\gamma \in \langle 0, \pi\rangle$ projecteren op de reële as in het $z$-vlak.

Voor een complexe potentiaalstroming geldt dat de vloeistofflux $f$ tussen de punten $z_1$ naar $z_2$ wordt gegeven door

$$f = \mathrm{Im}\left[\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}C\,(u - iv)\right],$$

waarbij $z_1$ en $z_2$ in het $z$-vlak liggen, $C$ een simpele* curve is die deze twee punten verbindt en $u$ en $v$ de stroomsnelheden zijn in het $z$-vlak.

c 7p) Laat zien dat $f$ gelijk is aan

$$f = \mathrm{Im}\left[w(\zeta_2) - w(\zeta_1)\right],$$

waarbij $\zeta_1$ en $\zeta_2$ de punten zijn die projecteren op respectievelijk $z_1$ en $z_2$.

d 4p) Bereken de vloeistofflux die tussen $z = -2c$ en $z = 0$ door de reële as naar beneden stroomt.

Voor stationaire potentiaalstromingen geldt de vergelijking van Bernouilli:

$$\frac{1}{2}\rho u^2 + p = C$$

e 5p) Bereken voor deze stroming het drukverschil tussen $z = 0$ en $z \to \infty$.

f 5p) Je vaart met een boot op zee. Door hevige golven is veel water in je boot gekomen. Je maakt, terwijl je doorvaart, een gat onderin de boot. Stroomt je boot nu verder vol met water?

*Simpel betekent dat de curve geen lussen mag hebben.

## 2 Warmtediffusie [30pt]

De diffusie van warmte in 3D wordt gegeven door de vergelijking

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T. \tag{1}$$

Om de temperatuursevolutie te bepalen de Laplace transformatie. De Laplace getransformeerde $F(s, \vec{x}) = \mathcal{L}\{f(t, \vec{x})\}$ wordt gegeven door

$$F(s, \vec{x}) = \int_{+0}^{\infty} \mathrm{d}t \; e^{-st} f(t, \vec{x}),$$

waarbij $s > 0$. Enkele minder eenvoudige Laplace transformaties staan gegeven in Tabel 1.

a 4p) Vergelijking (1) is een harmonische vergelijking, dus we mogen verschillende oplossingen altijd bij elkaar optellen. Laat zien dat we alleen twee oplossingen ($A(\vec{x}, t)$ en $B(\vec{x}, t)$) met elkaar mogen vermenigvuldigen als $(\nabla A) \cdot (\nabla B) = 0$.

b 4p) Laat zien dat geldt dat

$$\mathcal{L}\left\{ f^{(2)}(t, \vec{x}) \right\} = s^2 F(s, \vec{x}) - s f(+0) - f^{(1)}(+0)$$

waarbij $f(+0) \equiv \lim_{t \downarrow 0} f(t)$ en $f^{(n)}$ de $n$-de afgeleide van $f$ naar $t$.

We beschouwen eerst een 1-dimensionaal probleem, dus $T$ is een functie van $t$ en $x$. Als we nu de Laplace vergelijking nu niet over $t$ uitvoeren, maar over $x$, dan vinden we $\Theta_x(t, s) = \mathcal{L}\{T(t, x)\}$.

c 4p) Geef de vergelijking van $\Theta_x$, volgend uit vergelijking (1), en noem de randvoorwaarden die nodig zijn om deze vergelijking op te kunnen lossen.

d 7p) We gaan nu kijken naar warmtediffusie vanaf een punt in 3D. Op $t = 0$ is de temperatuur van de ruimte $T_0$, met uitzondering in de oorsprong $R$ waar de temperatuur $T_1$ is. Voor $t > 0$ blijft de temperatuur in de oorsprong $T_1$, terwijl de rest van de ruimte langzaam opwarmt.

Bepaal $T(t, x)$ voor 1-dimensionale warmtediffusie en $x \in [0, \infty\rangle$, gebruik hiervoor de Laplace transformatie (met integratie over $t$).

e 4p) Laat zien dat voor $\vec{x} = \{x, y, z\} : x_i \in [0, \infty\rangle$,

$$T(t, \vec{x}) = T_0 + (T_1 - T_0) \mathrm{Erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\kappa t}}\right) \mathrm{Erfc}\left(\frac{y}{\sqrt{4\kappa t}}\right) \mathrm{Erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{4\kappa t}}\right)$$

een valide oplossing is van vergelijking (1) en voldoet aan de bij d) genoemde randvoorwaarden.

f 7p) Laat zien waarom deze oplossing (voor $\vec{x} : x_i \in [0, \infty\rangle$) echter niet de juiste oplossing is voor warmtediffusie vanaf een punt in 3D. *Hint: Welke randvoorwaarden gelden nog meer op $x_i = 0$ voor warmtediffusie vanaf één punt?*

Tabel 1: Enkele Laplace transformaties en definities.

| $f(t)$ | $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ | voorwaarde |
|---|---|---|
| $\mathrm{Erfc}\left(\frac{k}{2}t^{-1/2}\right)$ | $s^{-1}e^{-k\sqrt{s}}$ | $k > 0$ |
| $e^{a^2t}\mathrm{Erf}\left(at^{-1/2}\right)$ | $s^{-1/2}(s^{1/2}+a)^{-1}$ | |
| $\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-k^2/4t}$ | $e^{-k\sqrt{s}}$ | |

$$\mathrm{Erf}(x) \equiv \frac{2}{\pi}\int_0^x \mathrm{d}z\; e^{-z^2}$$
$$\mathrm{Erfc}(x) \equiv 1 - \mathrm{Erf}(x)$$

# 3 Stabiliteit van een pijpstroming stroming [40pt]

We beschouwen een stroming van een onsamendrukbare vloeistof met constante dichtheid in een pijp met straal $R$. Na schaling vinden we de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{u}}{dt} &= -\nabla p + \mathrm{Re}^{-1}\nabla^2\vec{u}\\ \nabla\cdot\vec{u} &= 0.\end{aligned}$$

We gebruiken voor deze opgave cilindercoördinaten $\vec{u} = \{u_z, u_r, u_\theta\}$, zie voor operatorcomponenten Tabel 2.

We willen de stabiliteit onderzoeken van een tijdsconstante laminaire stroming $\vec{U} = \{U(r), 0, 0\}$ aangedreven door een drukgradiënt $P(z)$.

a 3p) Waarom moet $\alpha \equiv \dfrac{\partial P}{\partial z}$ constant zijn?

b 6p) Bepaal $U$.

We onderzoeken de (in)stabiliteit van deze stroming met quasi-2D verstoringen $\vec{u}'(r,z,t) = \{u'_z, u'_r, 0\}$ en $p = P + p'$, waarbij we veronderstellen dat $\vec{U} \gg \vec{u}'$.

c 6p) Schrijf de impulsvergelijkingen voor $u'_z$ en $u'_r$ uit en reduceer deze vergelijkingen tot de relevante termen.

We introduceren de operatoren $D$, $D_*$, $Z$ en $\Delta_*$:

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial r}, \qquad D_* \equiv \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}, \qquad Z \equiv \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}, \qquad \Delta_* \equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2} + DD_*$$

en de stroomfunctie $\psi$, gedefiniëerd door

$$\begin{aligned}u'_z &= \frac{1}{r}\frac{\partial r\psi}{\partial r} = D_*\psi\\ u'_r &= -\frac{\partial\psi}{\partial z}.\end{aligned}$$

Tabel 2: De bewegingsvergelijkingen in cilindercoördinaten.

$\vec{x} \equiv \{z, r, \theta\}$; $\vec{u} \equiv \{u_z, u_r, u_\theta\}$, $\phi$ is een scalarfunctie.

| | |
|---|---|
| $\dfrac{du_z}{dt} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \nu\nabla^2 u_z$ | $\nabla \cdot \vec{u} = \dfrac{\partial u_z}{\partial z} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r u_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$ |
| $\dfrac{du_r}{dt} - \dfrac{u_\theta^2}{r} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\nabla^2 u_r - \dfrac{u_r}{r^2} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right)$ | $\nabla^2\phi = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial \theta^2}$ |
| $\dfrac{du_\theta}{dt} + \dfrac{u_r u_\theta}{r} = \dfrac{1}{r\rho}\dfrac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\nabla^2 u_\theta - \dfrac{u_\theta}{r^2} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)$ | $\dfrac{d\phi}{dt} = \dfrac{\partial \phi}{\partial t} + u_z\dfrac{\partial \phi}{\partial z} + u_r\dfrac{\partial \phi}{\partial r} + \dfrac{u_\theta}{r}\dfrac{\partial \phi}{\partial \theta}$ |

d 3p) Laat zien dat deze stroomfunctie $\psi$ altijd een divergentievrije stroming beschrijft.

e 7p) Elimineer de druk, introduceer $\psi$ en laat zien dat de evolutie van $\psi$ wordt gegeven door:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial z}\right)\Delta_*\psi - (ZDU)\frac{\partial \psi}{\partial z} = \mathrm{Re}^{-1}\Delta_*^2\psi. \qquad (2)$$

We introduceren een periodieke verstoring $\psi(r, z, t) = \hat{\psi}(r)e^{i(kz-\omega t)}$.

f 4p) Waarom kan $\omega$ een imaginair deel hebben en $k$ niet?

g 3p) Laat zien, voor Re$\rightarrow \infty$, dat invullen van de bovenstaande periodieke verstoring $\psi$ in vergelijking (2) de volgende vergelijking oplevert.

$$(Uk - \omega)\left(DD_* - k^2\right)\hat{\psi} - k(ZDU)\hat{\psi} = 0 \qquad (3)$$

h 8p) Vermenigvuldig vergelijking (3) met $r\hat{\psi}^*$, waarbij $\hat{\psi}^*$ de complex geconjugeerde van $\hat{\psi}$ is; integreer over $r$ van 0 tot $R$; gebruik dat $u_z(R) = 0$ en laat zien dat het *Rayleigh Inflection Point Theorem* niet voorspelt dat deze stroming instabiel is bij afwezigheid van wrijving.