Stromingsleer & Transportverschijnselen
Tussentoets 1

NS-265B

2 Maart 2016

- Geen open boek tentamen.
- Een enkele wiskundige relaties staan op pagina 3.
- Het cijfer is het aantal behaalde punten gedeeld door 1.5.
- Geen rekenmachine nodig.
- Maak elke opgave (1 & 2) op aparte bladen!

Stroming in een eindige cilinder [10pt]

De Navier-Stokes vergelijkingen - zonder externe krachten - voor een onsamendrukbare vloeistof worden gegeven door

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{u} \tag{1}$$

We bekijken een cilinder met straal R en een dikte H. De vloeistof wordt dus op $z = 0$ en $z = H$ afgesloten met een dop.

We gaan rekenen in cilindercoördinaten, dus $\vec{u} = \{u_r, u_\vartheta, u_z\}$ - zie pagina 3.

a 2pt) We beschouwen de situatie dat beide doppen (op $z = 0$ en H) en de buitenwand (op $r = R$) roteren met hoekfrequentie ω. Beargumenteer waarom $\vec{u}(\vec{x}, t)$ reduceert voor dit probleem tot $\vec{u} = \{0, u_\vartheta(r), 0\}$.

b 3pt) Bepaal $\vec{u}$ en p voor deze situatie.

c 3pt) In de tweede situatie staat de onderste dop stil en draait de bovenste dop (op $z = H$) nog steeds rond met hoekfrequentie Ω. De rotatiesnelheid van de buitenwand loopt lineair op ($\omega_R = \Omega z/H$). Laat zien dat

$$\vec{u} = \{0, \Omega rz/H, 0\}$$

geen stationaire oplossing van dit probleem kan zijn.

d 2pt) Maak een schets van de stroming in het z, r-vlak voor de situatie dat de stroming laminair is. Is de oplossing afhankelijk van ν?

Een papieren vliegtuigje [5pt]

We beschouwen een complexe stroming rond een cilinder met straal a . We kiezen het centrum van de cilinder op $z = i\gamma$, waarbij γ een reëel getal groter dan 0 is.

$$w(z) = U\left((z - i\gamma)e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z - i\gamma}e^{i\alpha}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\log(z - i\gamma) \tag{2}$$

die we transponeren naar Z met een Joukowski transformatie

$$Z = z + \frac{c^2}{z} \tag{3}$$

waarbij we c zo kiezen dat $a^2 = c^2 + \gamma^2$, zodat $ae^{-i\beta} = c - i\gamma$.

a 3pt) Bereken, voor een gegeven α, a en β, welke circulatie Γ er nodig is om de stroming u_* en v_* op het rechter uiteinde begrensd te krijgen.

b 2pt) Wat vliegt er stabieler: een papieren vliegtuigje met rechte vleugels (dus $\gamma = 0$) of een papieren vliegtuigje met iets gebolde vleugels (dus $0 < \gamma \ll c$)? Geef een fysische verklaring van je antwoord.

Tabel 1: Enkele relaties voor potentiaalstromingen en Joukowski transformaties.

$\frac{dW}{dZ} = u_* - iv_*$ $\frac{dw}{dz} = u - iv$	$\frac{dW}{dZ} = \frac{dw/dz}{dZ/dz}$
$z = x + iy = re^{i\vartheta}$ $\cos\vartheta = \frac{1}{2}\left(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}\right)$	$\sin\vartheta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}\right)$

Vector identiteiten in cilindercoördinaten

De vectoren $\vec{x}$, $\vec{u}$ en $\vec{v}$ zijn gedefiniëerd met $\vec{x} = (z, r, \vartheta)$, $\vec{u} = (u_z, u_r, u_\vartheta)$, $\vec{v} = (v_z, v_r, v_\vartheta)$ en ϕ is een scalar.

$$
\begin{aligned}
\frac{Du_r}{Dt} - \frac{u_\vartheta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\Delta u_r + \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta}\right) \\
\frac{Du_\vartheta}{Dt} + \frac{u_r u_\vartheta}{r} &= -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \vartheta} + \nu\left(\Delta u_\vartheta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} - \frac{u_\vartheta}{r^2}\right) \\
\frac{Du_z}{Dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta u_z \\
\nabla \cdot \vec{u} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0
\end{aligned}
$$

waarin

$$
\begin{aligned}
(\vec{u} \cdot \nabla) &= u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\vartheta}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \\
\Delta &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.
\end{aligned}
$$