# Stromingsleer & Transportverschijnselen
# Hertentamen

NS-265B

29 Juni 2016

- Geen open boek tentamen.
- Het cijfer is het aantal behaalde punten gedeeld door 10.
- Geen rekenmachine nodig.
- Zet alleen je studentnummer op de antwoordenbladen.
- Maak maak opgave 5 in ieder geval op een apart blad!

# 1 Algemene vraag [20 pt]

a 10pt) Bespreek voor welke waardes van het Reynolds getal de vergelijkingen (1) tot (3) relevant zijn.

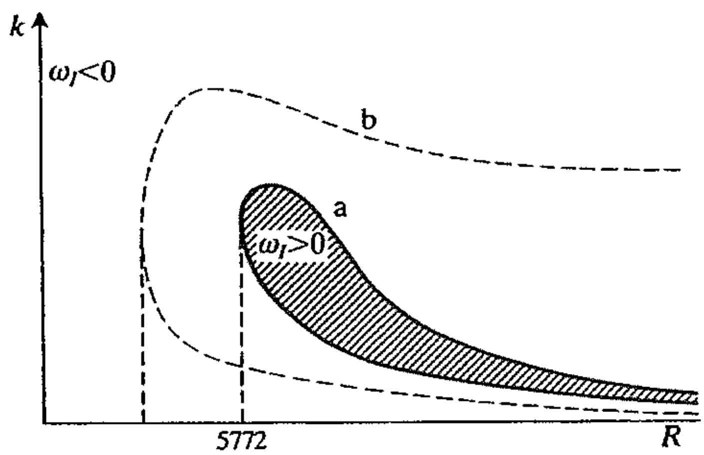
$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho\vec{g} \tag{1}$$

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu\nabla^2\vec{u} + \rho\vec{g} \tag{2}$$

$$0 = -\nabla p + \mu\nabla^2\vec{u} + \rho\vec{g} \tag{3}$$

b 5pt) Waarom mogen bij lineaire storingsanalyse de niet-lineaire verstoringstermen verwaarloosd worden?

c 5pt) Een parallelle stroming in een pijp heeft geen 'inflection point'. Reynolds stability analyse geeft dan aan dat in dat geval verstoringen vanaf een Reynolds getal van 5772 kunnen groeien (Figuur 1). Waarom is het toch mogelijk om in een pijp een turbulente stroming te krijgen vanaf een Reynolds getal van ongeveer 2000?




Figuur 1: 'Marginal stability' (Verstoringen groeien noch dempen weg) diagram voor a) een stroming zonder 'inflection point' (omkeringspunt) en b) een stroming met 'inflection point'.

## 2 Behoudswet voor een tracer [15pt]

Leidt de behoudswet voor de concentratie ($C$) van een tracer af in een samendrukbare vloeistof, dus

$$\frac{DC}{Dt} = \ldots$$

De tracer heeft als eigenschap dat het niet perfect met de vloeistof meebeweegt, de tracer valt langzaam naar beneden door de vloeistof heen. De stroomsnelheid van de tracer ($\vec{u}_C$) wordt daarom gegeven door

$$\vec{u}_C = \vec{u} + \vec{u}_S = \vec{u} + c\vec{g},$$

waarin $\vec{u}$ de vloeistofsnelheid is, $c$ een constante ($c > 0$) en $g$ de zwaartekrachtsversnelling. Er zijn geen bronnen of putten van de tracer.

Start bij de generieke behoudsrelatie voor een grootheid $\Psi$ over een zeker volume $V$ ($\vec{v}$ is de snelheid van $\Psi$):

$$\int_V \frac{\partial \Psi}{\partial t}\ \mathrm{d}t = -\int_S \Psi \vec{v} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S + \int_V S(\Psi)\ \mathrm{d}V,$$

waarin $S$ een bron- of putterm van $\Psi$ is.

## 3 Potentiaalstromingen [20pt]

We beschouwen de stroming rond een cilinder met straal $a$ en middelpunt $-\lambda + i\gamma$. In het ongeprojecteerde vlak $z$ wordt de stroming $w(z)$ om deze cilinder dan gegeven door

$$w(z) = U\left[(z + \lambda - i\gamma)e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z + \lambda - i\gamma}e^{i\alpha}\right] - \frac{i\Gamma}{2\pi}\log(z + \lambda - i\gamma). \tag{4}$$

Deze stroming gaan we projecteren op het $Z$ vlak met behulp van een Joukowski transformatie:

$$Z = z + \frac{c^2}{z}, \tag{5}$$

waarbij $c$ relateert aan $a$ middels $(c + \lambda)^2 + \gamma^2 = a$ en $c + \lambda - i\gamma = ae^{i\beta}$.

a 2pt) Naar welk punt $C$ in de $Z$-ruimte projecteert het punt $c$ in het $z$-vlak?

b 4pt) Maak schetsjes van de projectie van de cilinder naar het $Z$-vlak, voor $\lambda, \gamma \ll c$ en voor $\lambda, \gamma \approx c$.

c 6pt) Bepaal $u_\star - iv_\star = \dfrac{dW}{dZ} = \dfrac{dw/dz}{dZ/dz}$.

d 8pt) Voor welke waarde(s) van $\Gamma$, als functie van $a$, $\alpha$ en $\beta$, is de stroming $u_\star - iv_\star$ op het punt $C$ eindig?

## 4 Warmtediffusie [25 pt]

Warmtediffusie in een 1D medium wordt beschreven door

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{6}$$

We gaan de tijdsevolutie van $T$ bekijken voor het volgende probleem: op tijdstip $t = 0$ wordt er $Q$ energie op $x = 0$ toegevoegd, om op tijdstip $t = t_1$ weer $Q/2$ energie op $x = 0$ te onttrekken.

We gaan dit probleem oplossen door Fourier transformaties te gebruiken, gegeven door

$$\hat{T}(k,t) = F(T(x,t)) = \int_{\infty}^{\infty} T(x,t) e^{ikx}\, \mathrm{d}x$$

a 3pt) Laat zien dat vergelijking (6) lineair is, dus als $A(x,t)$ en $B(x,t)$ geldige oplossingen zijn, $C \equiv A + B$ ook een geldige oplossing is.

b 6pt) Laat zien dat voor de situatie dat we alleen $Q$ warmte op $t = 0$ toevoegen, dus $T(0,x) = \frac{Q}{\rho c_p}\delta(x) + T_0$, de oplossing in de golfruimte $k$ gelijk is aan

$$\hat{T}(k,t) = \frac{Q}{\rho c_p} e^{-k^2 \kappa t} + 2\pi T_0 \delta(k).$$

c 6pt) Bepaal $T(x,t)$ voor als we alleen energie toevoegen (op $t = 0$).

d 6pt) Geef, met logisch redeneren, de oplossing voor $t \geq t_1$, nadat we weer $Q/2$ energie onttrokken hebben*.

e 5pt) Voor welke $t > t_1$ is $T > 0$ voor alle $x$?

---

*Mocht je er bij c) niet uitgekomen zijn, gebruik dan als oplossing van c) $T(x,t) = T_0 + \frac{Q}{\rho c_p} \frac{1}{x^2 + t}$

## 5 The Langevin equation [20 pt]

The Langevin equation of motion describes the motion of a single colloidal particle very well. (Recall that for a sphere Stoke's translational friction coefficient is $f_{\text{tr}} = 6\pi\mu a$, where $\mu$ is the coefficient of viscosity and $a$ is the radius of the particle.)

a 8pt) What is the Langevin equation for the translational motion of a sphere? Be careful to define clearly all variables. Note that no derivations are necessary here.

b 4pt) Let $\langle r(t) \rangle$ be the average distance travelled by such a particle in time $t$. Sketch $\langle r(t) \rangle$ for this system.

c 4pt) Let $\langle r^2(t) \rangle$ be the average squared distance travelled by such a particle in time $t$. Sketch $\langle r^2(t) \rangle$ for this system.

d 4pt) Assume that we now have $N$ such colloidal particles that interact via a pairwise potential $\phi(r)$ that depends only on the distance between the particles $r$. In this case, the total potential energy of is given by

$$U_{tot} = \sum_{i,j} \phi(r_{ij}) \tag{7}$$

where $r_{ij}$ is the distance between particles $i$ and $j$. What is the Langevin equation for a single particle in this system?

# Wiskundig gereedschap

*Theorema van Stokes:*

Als $\vec{u}$ een vectorveld en $S$ een willekeurig oppervlak met rand $l$ is, dan geldt:

$$\int_l \vec{u} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{u}) \cdot d\vec{S}.$$

*Stelling van Gauss / divergentiestelling:*

Als $V$ een willekeurig volume is, omsloten door het oppervlak $S$, dan geldt:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{u}\; dV = \int_S \vec{u} \cdot \vec{n} d\vec{S}.$$

*Fourier transformaties*

Voor de onderstaande elementaire functies is de Fourier transformatie gedefiniëerd als ($b$ is reëel) : $\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\; e^{-ikx}\; dx.$

| $f(x)$ | $\hat{f}(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}$ | $f(x)$ | $\hat{f}(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{x^2+b^2}$ | $\frac{\pi}{b} e^{-bk}$ | $\frac{x}{x^2+b^2}$ | $\frac{-\pi ik}{b} e^{-bk}$ |
| $e^{-bx^2}$ | $\sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-k^2/(4b)}$ | $\int_0^x g(t)\;\mathrm{d}t$ | $\frac{1}{ik}\hat{g}(k) + c\delta(k),\; c \in \mathbb{R}$ |
| $g(x-b)$ | $e^{-ikb}\hat{g}(k)$ | | |