Thuistentamen

Geschiedenis van de Wiskunde wisb382

6–13 april 2017

Beantwoord de volgende vragen met behulp van je GvdW-boek (Boyer), aantekeningen en eventueel ook andere bronnen. Vermeld bij je antwoorden duidelijke verwijzingen (incl. pagnrs) naar de literatuur waarop je je baseert. Daarbij gaat het er niet om dat je helemaal volgens de regels refereert, maar je moet mij wel in staat stellen om je bronnen na te gaan. Overigens ben je zelf verantwoordelijk voor je antwoorden en kun je je niet zonder meer beroepen op wat willekeurig welke andere auteur beweert. *Kritisch gebruik* van literatuur wordt echter wel gewaardeerd.

Bij de beoordeling tellen de volgende aspecten mee:

- kritisch gebruik van: de cursusstof (boek, colleges, workshops), je eigen historisch inzicht en eventueel aanvullende bronnen;
- bespreken van ter zake doende punten;
- inhoudelijk goede argumentatie (zowel geschiedkundig als wiskundig);
- toepasselijkheid van aangehaalde bronnen;
- stijl: bondig, concreet, correct; hoogstaand proza hoeft zeker niet maar correct en begrijpelijk Nederlands moet wel. Een puntenlijstje kan een goed antwoord zijn.

NB: Tentamens moeten individueel gemaakt worden. Bij opvallende overeenkomsten tussen uitwerkingen kan een mondelinge aanvulling vereist zijn én bestaat de kans dat het werk onvoldoende wordt bevonden.

Inleveren op papier, uiterlijk 17:00 op do 13 april 2017.

Opdrachten

1. Op p. 25–26 geeft Boyer een mogelijk algoritme waarmee de Mesopotamiërs $\sqrt{2}$ zouden kunnen hebben benaderd. Voer het algoritme uit in het sexagesimale getalstelsel en ga na of het inderdaad de juiste uitkomst geeft.

Uitwerking: Het algoritme om $\sqrt{a}$ te berekenen is:

1. kies een beginschatting a_1

2. bereken $b_1 = \frac{a}{a_1}$ en $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$
3. herhaal de laatste stap voor b_2 en a_3 enzoverder, zo ver als nodig.

Dit moeten we uitvoeren voor $a = 2$ en $a_1 = 1;30$; de derde benadering zou dan $a_3 = 1;24,51,10$ moeten zijn zoals op tablet YBC7289. Dit gaan we na.

Eerst berekenen we

$$b_1 = \frac{2}{1;30} = \frac{120}{90} = 1 + \frac{30}{90} = 1;20.$$

Hiermee vinden we

$$a_2 = \frac{1}{2}(1;30 + 1;20) = 1;25.$$

In de volgende stap berekenen we

$$b_2 = \frac{2}{1;25} = \frac{120}{85} = 1\frac{35}{85} = 1\frac{7}{17}.$$

Het is nu wat lastiger om $\frac{7}{17}$ uit te drukken als sexagesimaal getal omdat 17 geen gemene delers met 60 heeft. Een sexagesimale "shift" geeft $60 \cdot \frac{7}{17} = \frac{420}{17} = 24\frac{12}{17}$. Analoog berekenen we $\frac{12}{17}$ met shift: $60 \cdot \frac{12}{17} = 42\frac{6}{17}$ en vervolgens zie je zonder extra werk: $60 \cdot \frac{6}{17} = 21\frac{3}{17} \approx 21$. We vinden dus

$$\begin{aligned} b_2 &= 1\frac{7}{17} = 1;24,42,21 \\ a_3 &= \frac{1}{2}(a_2 + b_2) = 1;24,51,10,30 \end{aligned}$$

Als je de laatste 30 afkapt dan heb je inderdaad de tekstbenadering gevonden.

Babylonische deeltafels sloegen het getal 17 over omdat de deling op 60 niet mooi uitkomt. Als Babyloniërs werkelijk dit algoritme gebruikten (of iets wat er sterk op lijkt) dan moeten ze dus ook een methode gehad hebben om dit soort "ongemakkelijke" delingen uit te voeren maar daar zegt Boyer vrijwel niets over. Het belang van het daadwerkelijk zelf uitvoeren van zulke ogenschijnlijk "triviale" berekeningen is dat je erdoor met de neus op dit soort details wordt gedrukt. Helaas heeft bijna iedereen dit punt onterecht onder het vloerkleed gemoffeld.

2. De volledige acceptatie van negatieve getallen is in de loop van de geschiedenis uiterst moeizaam en stroef verlopen. Schets deze ontwikkeling in grote lijnen, en zoek naar belangrijke factoren die de acceptatie bevorderd respectievelijk belemmerd hebben.

Uitwerking: Ik maak eerst een tabel met relevante informatie uit Boyer.

pag	wanneer	wat
141	c.-200	Grieks: geen negatieve grootheden in meetkundige algebra
176	v.Chr.	China: neg. getallen in de Negen Hst.
180		rekenen met neg.get. geen probleem in China, maar niet geaccepteerd als oplossing.
198	c.+600	Bramagupta: rekenkunde van neg.get.
206	c.+800	Khwarizmi: geen neg.get.; neg. oplossingen van vgl worden genegeerd.
219	1100	Khayyam: idem.
250	1484	Chuquet, neg.exponenten
255	1544	Stifel: accepteert neg.coefficienten, maar niet neg.oplossingen; "numeri absurdi"
259	c.1540	Cardano wordt geconfronteerd met wortels uit neg.getallen; het bestuderen van kubische vergelijkingen leidt noodzakelijk naar complexe getallen.
275	1591	Viète: geen neg.getallen; p.276 Harriot ook niet
275	1621	Girard: wel neg.getallen en oplossingen
312	1637	Descartes: neg. is "vals", negeren
317	1637	"Descartes never fully understood neg. coord."
321	1636	Fermat idem
340	1658	De Witt gebruikt het teken van de discriminant om vergelijkingen van kegelsneden te onderscheiden, en Hudde staat neg.waarden van coëfficiënten toe.
350	1655	Wallis extrapoleert kwadratuur-resultaten van $y = x^n$ naar neg. waarden van n.
368	1676	Newton gebruikt neg. coördinaten in *Enumeratio.*
381	18e eeuw	algebra-boekjes vaak nog problematisch met neg.get.
396,405	c.1700	Bernoulli etc: log van neg.getallen??
413	1747	Euler lost dit probleem op
462	c.1810	"Whereas on the Continent, mathematicians were developing the graphical representation of complex numbers, in England there were protests that not even negative numbers had validity".
513	1844	Grassmann is deels geïnspireerd door meetkundig interpreteren van neg.grootheden.

Samenvattend, de grote lijn: In de klassieke Griekse meetkunde (en naar we moeten aannemen ook de vroegere Mesopotamische en Egyptische culturen) kwamen negatieve getallen niet voor. Tegelijkertijd in China kon er wel mee gerekend worden maar ze werden niet geaccepteerd als oplossing van een probleem. In het

Middeleeuwse India, vanaf Bramagupta, werden negatieve getallen wel erkend maar de Arabisch-Islamitische geleerden hebben dat niet overgenomen (itt tot bijvoorbeeld het decimale positiesysteem). In Europa vinden we eind 15e eeuw sporadisch negatieve exponenten, daarna een zeer langzaam toenemende bereidheid om negatieve getallen toe te laten, eerst als coëfficiënten in vergelijkingen en pas later als oplossingen. Negatieve getallen blijven nog tot in de 19e eeuw problematisch (niet zozeer bij de meest vooraanstaande onderzoekers als wel bij de "lagere" echelons).

Factoren: acceptatie lijkt het makkelijkst te zijn gegaan in algebraïsch-aritmetische omstandigheden: China met zijn rekenstokjes, India, Chuquets exponenten. Het is goed voorstelbaar dat bijv het optreden van complexe wortels bij het oplossen van derdegraadsvergelijkingen (Cardano, Bombelli) heeft bijgedragen aan de acceptatie van negatieve getallen, maar hier zou nader onderzoek voor nodig zijn. Ook lijkt het te helpen dat men er soms nuttige dingen mee kon doen (Wallis, de Witt). Daartegenover lijken meetkundige contexten juist een belemmering: Grieken, Arabieren en de nadrukkelijk op Griekse meetkunde geörienteerde Europese Renaissance. Dit is begrijpelijk omdat in de meetkunde lengten van nature niet-negatief zijn: de late acceptatie in de analytische meetkunde is hier ook een getuigenis van. Dat Grassmann uit dit probleem juist inspiratie put om iets nieuws te beginnen duidt er vooral op dat hij negatieve getallen *op zich* juist wel accepteerde.

3. Er wordt vaak beweerd dat Fermat een amateurwiskundige was. Licht het onderscheid tussen amateur- en beroeps- of professioneel wiskundige toe. Vind twee voorbeelden van tijdgenoten van Fermat die je zou typeren als beroepswiskundige. Verklaar je keuze en vergelijk hun bijdragen aan de wiskunde met die van Fermat.

Uitwerking: Het gebruikelijke onderscheid tussen amateur en beroeps is dat een beroeps ervan leeft, terwijl een amateur het uit liefhebberij erbij doet (letterlijk: *amare* is liefhebben). Sommige studenten noemen ook onderscheid tussen al dan niet wiskundig geschoold/opgeleid, maar dat onderscheid kan niet lang stand houden als je je bedenkt dat er in Fermats tijd nog vrijwel nergens wiskundige opleidingen zijn. Aan de universiteiten heeft wiskunde hooguit een propedeutische functie voorafgaand aan de "echte" studie in filosofie, rechten, theologie of medicijnen.

Fermat (1601–1665) was van beroep jurist en deed de wiskunde er als liefhebberij bij: wat dat betreft is de typering correct. Fermat is van onschatbare betekenis geweest voor de wedergeboorte van de getaltheorie. Daarnaast hoorde hij bij de pioniers in de kansrekening en bij de kwadratuur- en raaklijnproblemen (bijv minima/maxima) die later deel zouden uitmaken van de differentiaal- en integraalrekening.

Onder andere de volgende tijdgenoten van Fermat zijn correct aangeduid als "professioneel" in de zin dat ze (min of meer) van de wiskunde leefden: Barrow, Briggs, Cavalieri, Galileo, Frans van Schooten (sr en/of jr), Roberval (vaakst genoemd). Gek genoeg werd Willebrord Snellius niet genoemd. Als je hun bijdragen vergelijkt met die van Fermat moet je vaststellen dat Fermat ze stuk voor stuk overschaduwt in belang en veelzijdigheid. Moraal: amateur is, zeker in de 17e eeuw, inderdaad eerder een enthousiaste "liefhebber" dan een ongeschoolde prutser.

Viète, Van Ceulen en Reimers werden ook genoemd maar zijn geen tijdgenoten. Descartes werd ook genoemd, maar die kun je niet beschouwen als beroeps: wiskunde levert hem geen inkomen op, zijn enige bijdrage aan het vak is gepubliceerd als *appendix* bij een filosofische verhandeling, en zoals Boyer ook opmerkt staat bij hem de filosofie op de eerste plaats.

4. Geef bij elke hieronder genoemde vorm van financiering een passend voorbeeld van een ontwikkeling in de wiskunde. Geef alleen voorbeelden van vóór 1900. Geef bij elk voorbeeld: wie of welke instelling geeft geld aan wie en waarom, wat is het resultaat en wanneer/waar gebeurde het. Een vooruitzicht op financering telt ook; het is niet noodzakelijk dat de financiering daadwerkelijk vóóraf plaatsvond.

   (a) Rechtstreeks: de financiering was speciaal bedoeld om een specifiek probleem op te lossen of een specifieke ontwikkeling te bewerkstelligen etc.

   Uitwerking: Voorbeeld: de vele prijsvragen die verschillende academies in de 17-19e eeuw uitschreven. Zo'n prijsvraag ging over een specifiek probleem en er waren geldbedragen in het vooruitzicht gesteld: bjv. de Academie van Parijs in 1812 over de theorie van warmte, gewonnen door Fourier, met belangrijke implicaties (a) het verspreiden van Fouriertheorie en (b) nieuwe fundamentele problemen die slechts opgelost konden worden door een rigorizering van de analyse.

   Ook genoemd zijn: Archimedes; het opzetten van het metrieke systeem in Frankrijk eind 18e eeuw; de (o.a. Britse) prijzen voor het lengteprobleem. Pascals prijsvraag over de cycloide vind ik een minder sterk voorbeeld omdat hij afzag van het uitkeren van de prijs: er heeft dus geen financiering plaatsgevonden en het is makkelijk om met een beter voorbeeld te komen.

   (b) Algemeen: er is geld beschikbaar gesteld om wiskunde te doen zonder specifiek doel.

Uitwerking: Voorbeeld: ca. 800, de kalief al Mamun financiert het Huis van Wijsheid in Bagdad, waar o.a. Khwarizmi verblijft en waar veel Griekse en Indiaase teksten zijn verzameld en vertaald. Invloed o.a. op de verspreiding van het Hindu-Arabische getalsysteem en op de ontwikkeling van de algebra.

Ook genoemd: l'Hôpital betaalt Johann Bernoulli; Euler in St.Petersburg/Berlijn, Gauss' ondersteuning door de Hertog van Brunswijk, Newtons positie in Cambridge.

(c) Eigen middelen: de wiskundige/wetenschapper/geleerde beschikte zelf over voldoende kapitaal om zich volledig en onbezwaard aan de wiskunde te wijden. Hierbij kun je uiteraard niet aangeven wie het geld beschikbaar stelt, maar probeer wel te achterhalen waar het kapitaal vandaan komt.

Uitwerking: Voorbeeld: Christiaan Huygens, zoon van een rijke familie in het centrum van de macht, het familiekapitaal vloeit voort uit het behartigen van de belangen van de Oranjes. Plaats: deels Parijs, deels Hofwijck (nabij Voorburg). Wat en wanneer: bijna alle belangrijke onderwerpen eind 17e eeuw: krommen, analytische meetkunde, kansrekening; uitvinder van de slingerklok, evoluten, verwachtingswaarde, ontdekker van de ringen van Saturnus, maar geen differentiaal- en integraalrekening.

Ook aangevoerd werden: de sekte van de Pythagoreërs, Napier, Pascal, en (opnieuw) 'l Hôpital.

(d) Miskend genie: een (op dat moment) relatief onbekende persoon bereikt een belangrijke doorbraak en krijgt desondanks geen financiële waardering achteraf. Beschrijf in dit geval niet de financiers maar zoek in plaats daarvan naar de redenen waarom die zich niet aandienden.

Uitwerking: Voorbeeld: Galois, fundamenteel inzicht in het verband tussen het oplossen van veeltermvergelijkingen en het bestaan van symmetrieën tussen de oplossingen, Parijs ca. 1830. Miskend omdat hij en zijn werk te excentriek waren voor de gevestigde orde. Min of meer gelijktijdig overkomt Abel hetzelfde. Beiden hadden nog gemeen dat ze stierven voordat ze begrepen werden.

Ook Bolzano en Desargues werden genoemd. Met de eerste ben ik het eens (mooie vondst!), met de tweede minder, omdat je niet kunt spreken van een "doorbraak" als een (weliswaar hoogst origineel) boek twee eeuwen lang niet meer dan één pamfletje (van Pascal) teweegbrengt.

5. Hierachter staat een deel van een tekst van Omar Khayyam. Voor de terminologie

rondom parabolen kun je gebruik maken van Boyer's uitleg bij Apollonius. Lees de tekst van Khayyam en beantwoord de volgende vragen.

(a) Veronderstel dat de vergelijking is $x^3 + px = q$ voor gegeven positieve p en q. Druk de lengte van alle in de tekst voorkomende lijnstukken uit in p, q en x.

> **Uitwerking:** Je hebt hier nodig dat *kubus* is x^3; *zijde* of later ook wel *wortel* is x; het *aantal wortels* is p en het *getal* is q.
>
> Khayyam stelt AB gelijk aan de zijde van een vierkant met oppervlakte p, dus $AB = \sqrt{p}$. Verder heeft hij een volume q met grondvlak p en hoogte BC, zodat $BC = q/p$. Verder blijkt uit het verloop van de tekst dat $BE = DZ = x$ en $BZ = ED = x^2/\sqrt{p}$. De laatste vind je waarschijnlijk pas nadat je de b-opgave gedaan hebt. Ten slotte nog $CE = CB - EB = q/p - x$.

(b) Neem een voor dit probleem geschikte x- en y-as. Geef de vergelijking van de parabool in dit coördinatensysteem. Maak hierbij goed duidelijk hoe de relatie is met ordinaat, abscissa en parameter.

> **Uitwerking:** Aangezien we al $BE = x$ hebben en aangezien B de top (vertex) van de parabool is, ligt de volgende keuze voor de hand: B oorsprong, BE positieve x-as, BZ positieve y-as. Uit Boyer halen we dat de parabool de meetkundige plaats (locus) is waarvan het vierkant op de ordinaat DZ gelijk is aan de rechthoek met als zijden de parameter AB en de abscis BZ, d.w.z. in deze situatie $x^2 = \sqrt{p}y$. Hieruit volgt dan inderdaad $BZ = x^2/\sqrt{p}$.

(c) Het bewijs dat de constructie het juiste resultaat geeft begint bij de zin "The line DZ is an ordinate of the conic". Maak twee kolommen, zet in de linker kolom stap voor stap het bewijs van Khayyam, en geef in de rechter kolom toelichting en uitleg bij de stappen. Het hoeft niet persé in kolommen; elke andere overzichtelijke wijze is ook toegestaan.

Uitwerking:

DZ is ordinaat en $DZ^2 = BZ \cdot AB$	eigenschap van de parabool, zie b.
$AB : BE = BE : ED$	$BE = DZ$ en $ED = ZB$ omdat $BZDE$ een rechthoek is. Substitueer dit in de parabool-eigenschap en deel door $BE \cdot ED$, dan krijg je $AB : BE = BE : ED$.
Maar $BE : ED = ED : EC$	$ED \perp BC$ en BC is diameter van de cirkel dus ED is middenproportionaal tussen BE en CE.
continuous proportion $AB : BE : ED : EC$	volgt nu door combinatie van de twee vorige stappen
$AB^2 : BE^2 = BE : EC$	want $AB^2 : BE^2 = (AB : BE) \cdot (AB : BE) = (BE : ED) \cdot (ED : EC) = BE : EC$.
$AB^2 \cdot EC = BE^3$ omdat de hoogten EC en BE ...	het ene volume heeft als grondvlak het vierkant AB^2 en hoogte EC, de kubus heeft grondvlak BE^2 en hoogte BE, en uit de vorige stap volgt dat ze gelijk volume hebben.
Voeg aan beide volumes $AB^2 \cdot EB$ toe: $BE^3 + AB^2 \cdot EB = AB^2 \cdot BC$	immers $EC + EB = BC$
whose solid we have assumed...	... want we hadden BC juist zo gecontrueerd dat $AB^2 \cdot BC = q$, het gegeven getal.
But the solid whose base is the square of AB ... and height EB, is equal to the number of the given sides...	$AB^2 = p$ en $EB = x$ dus $AB^2 \cdot EB = px$
The cube EB, then, plus the number of its given sides is equal to the given number, which was required.	m.a.w., $x^3 + px = q$, zoals vereist was.

(d) Plaats dit fragment van Khayyam in historische context: wat vind je typerend, hoe sluit het aan bij wiskundigen eerder en later in de geschiedenis?

Uitwerking: Deze aanpak van *derdegraads* vergelijkingen doet denken aan Khwarizmi's aanpak van *tweedegraads* vergelijkingen: de terminologie om vergelijkingen uit te drukken is hetzelfde, zoals je mag verwachten binnen dezelfde Islamitisch-Arabische traditie. Ook zie je Khayyam duidelijk voortbouwen op de Griekse meetkunde van bijv. Apollonius. Boyer (p. 218) zegt dat op zich de techniek om kubische vergelijkingen op te lossen met kegelsneden niet nieuw was; wel nieuw is de systematische behandeling van *al* zulke vergelijkingen. Dat kunnen we dus als typerend opvatten. Khayyam dacht overigens dat het niet mogelijk was om kubische vergelijkingen ook algebraisch op te lossen (zoals Khwarizmi had gedaan voor kwadratische vergelijkingen). In Italië gebeurde dat later, in het midden 16e eeuw, wel degelijk (Cardano etc.).

Het verbaasde me dat zoveel studenten *niet* refereerden aan de positie van Khayyam in de geschiedenis van 3e graadsvergelijkingen, terwijl het hier natuurlijk precies dáárover gaat!

bron:
D.S. Kasir,
The algebra of Omar Khayyam
New York 1931

CHAPTER VI

TRINOMIAL EQUATIONS

Capable of Being Proved by Means of the Properties of the Conic Sections

After this we are to work on the remaining six trinomial equations.

I. The first species. *A cube and sides are equal to a number.*[1]

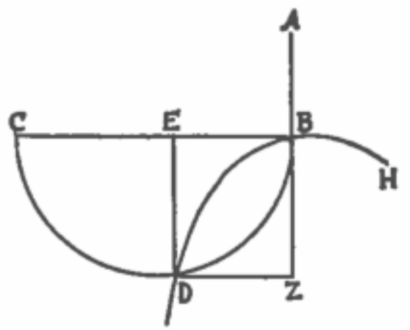

FIG. 17

Let the line AB (Fig. 17) be the side of a square equal to the given number of roots.[2] Construct a solid whose base is equal to the square on AB, equal in volume to the given number. The construction has been shown previously.[3] Let BC be the height of the solid. Let BC be perpendicular to AB. You know already what meaning is applied in this discussion to the phrase *solid number.* It is a solid whose base is the square of unity and whose height is equal to the given number; that is, the height is a line whose ratio to the side of the base of the solid is as the ratio of the given number to one. Produce AB to Z and construct a parabola whose vertex is the point B, axis BZ, and parameter AB. Then the position of the conic HBD will be known, as has been shown previously and it will be tangent to BC. Describe on BC a semicircle. It necessarily intersects the conic. Let the point of intersection be D; drop from

D, whose position is known, two perpendiculars DZ and DE on BZ and BC. Both the position and the magnitude of these lines are known. The line DZ is an ordinate of the conic. Its square is then equal to the product of BZ and AB.[5] Consequently, AB to DZ, which is equal to BE, is as BE to ED, which is equal to ZB.[6] But BE to ED is as ED to EC.[7] The four lines then are in continuous proportion, AB, BE, ED, EC,[8] and consequently the square of the parameter AB, the first, is to the square of BE, the second, as BE, the second, is to EC, the fourth.[9] The solid whose base is the square AB and whose height is EC is equal to the cube BE, because the heights of these figures are reciprocally equal to their bases.[10] Let the solid whose base is the square of AB and height is EB be added to both.[11] The cube BE plus the solid then is equal to the solid whose base is the square AB and whose height is BC, which solid we have assumed to be equal to the given number. But the solid whose base is the square of AB, which is equal to the number of roots, and whose height is EB, which is the side of the cube, is equal to the number of the given sides of the cube EB. The cube EB, then, plus the number of its given sides is equal to the given number, which was required.

This species does not present varieties of cases or impossible problems. It has been solved by means of the properties of the circle combined with those of the parabola.

II. The second species. *A cube and a number are equal to sides.*[12]

Let the line AB (Fig. 18) be the side of a square equal to the number of the roots,[13] and construct a solid having as its base the square of AB and equal to the given number, and let its height BC be perpendicular to AB.[14] Describe a parabola having as its vertex the point B and its axis along the direction AB and its parameter AB. This is, then, the curve DBE, whose position is known. Construct also a second conic, namely, a hyperbola whose vertex is the point C and whose axis is along the direction of BC. Each one of its two parameters, the perpendicular and the oblique, is equal to BC. It is the curve ECZ. This hyperbola also is known in position, as was shown by Apollonius in the 58th proposition of his first book.[15] The two conics will either meet or will not meet. If they do not meet, the problem is impossible of solution. If they do meet, they do it tangentially at a point or by intersection at two points.

Suppose they meet at a point and let it be at E, whose position is known. Then drop from it two perpendiculars ET and EH on