Midterm Intelligente Systemen (INFOB3IS)

- Het gebruik van boeken, aantekeningen, rekenmachines of andere bronnen is **niet toegestaan**.
- Elke vraag is 5 punten waard, dus je kunt 25 punten verdienen. Je cijfer is $10 \cdot \frac{\text{aantal punten}+1}{26}$.
- **Antwoord bondig!** Ik kan punten aftrekken voor overbodige uitweidingen.

1. **AI, Rationele agenten**

(a) (1 punt) Russell & Norvig onderscheiden in AIMA vier categorieën: $\{$thinking, acting$\}$ $\times$ $\{$humanly, rationally$\}$. Wat zit er **ín** die categorieën? (Geef bondig antwoord, dus zeg alleen welk type 'dingen' er wordt verdeeld, en niets meer dan dat.)

> **Antwoord:** In het boek zijn het categorieën van *definities van AI*, of *benaderingen van AI*. Je kunt ook zeggen dat het AI systemen zijn (die denken/handelen, als ...), of zelfs computers of computationele systemen.
>
> Het zijn niet 'agents', want die worden pas genoemd als de laatste categorie ('Acting rationally: The rational agent approach') wordt besproken.
>
> **Nakijkcommentaar:** .

(b) (1 punt) Elke *functie* is een mapping van de elementen van een verzameling (het *domein*) naar elementen van een verzameling (het *co-domein*). De functie 'kwadraat' bijvoorbeeld, mapt reële getallen naar niet-negatieve reële getallen. Wat zijn het domein en het co-domein van elke agent functie? (Geef als antwoord twee verzamelingen, en niets meer.)

> **Antwoord:** Het domein is de verzameling van *alle rijtjes waarnemingen*, het co-domein is de verzameling *acties* die de agent kan kiezen.
>
> **Nakijkcommentaar:** .

(c) De omgeving van een agent gaat als gevolg van de acties die de agent uitvoert door een serie ('sequence') toestanden. Russell & Norvig schrijven hierover:

> *If the sequence [of states] is desirable, then the agent has performed well. This notion of desirability is captured by a performance measure that evaluates any given sequence of environment states.*

i. (1 punt) Welke drie andere factoren beïnvloeden samen met deze performance measure, of een agent rationeel is?

> **Antwoord:** $PEAS - P$: De kennis die de agent heeft van de Environment, de Acties die de agent kan uitvoeren (eigenlijk de Actuatoren waarmee de agent is uitgerust), en de Sensoren waarmee de agent is uitgerust.
>
> **Nakijkcommentaar:** .

ii. (1 punt) Voor elke n $(1, 2, \ldots)$ bestaan er verschillende series van n opeenvolgende omgevingstoestanden. De performance measure functie geeft elk van die series een waarde. Voor elke n is er dus een maximum waarde over alle series van n toestanden. Kan een agent die **niet** voor elke n dit maximum behaalt, toch rationeel zijn?

Antwoord: Ja.
Nakijkcommentaar: Dit punt wordt verdiend als de uitleg bij de volgende deelvraag correct is. Als dat niet zo is, geeft gokkanscorrectie hier 0 punten.

iii. (1 punt) Leg je antwoord van vraag 1.(c)ii. uit.

Antwoord: De agent hoeft niet alwetend te zijn, en dus niet *overall* het best mogelijke te doen, maar alleen gegeven de kennis die hem over de omgeving is gegeven, zijn leervermogen, en de sensors en actuators die hij heeft. Bovendien kan het rationeel zijn nu te investeren—met lagere performance—om later hogere performance te behalen.
Nakijkcommentaar: Dit is aardig goed gegaan. Ik heb ook verschillende keren gezien dat mensen de rationaliteit van een agent definieerden in termen van een vergelijking met een andere agent: als er een andere agent is die het beter doet, is de agent niet rationeel. Andere agenten hebben er niet direct iets mee te maken.

2. **Logica, entailment**

(a) Stel dat A, B, C, ... variabelen zijn die staan voor propositielogische formules zoals p, of $\neg q$, of $\neg(q \vee r)$, of $(p \rightarrow (q \wedge r))$. Deze deelvraag (a) gaat niet over (deze of andere) *specifieke* formules, maar over het *algemene* geval van formules genaamd A, B, C, ...

i. (1 punt) Je spreekt $A \models B$ uit als "B volgt logisch uit A". Wat betekent $A \models B$, in termen van modellen waarin formules waar of onwaar zijn? (Antwoord in één zin.)

Antwoord: Dit betekent dat B waar is in alle modellen waarin A waar is.
Nakijkcommentaar: .

ii. (1 punt) Stel nu dat C en D de namen zijn van twee propositielogische formules waarvoor $C \models D$ **niet** waar is. Stel verder dat in de formules C en D samen in totaal n verschillende propositievariabelen voorkomen. Je maakt een waarheidstabel met 2^n rijen, en vult de beide kolommen onder de hoofdconnectieven van C en D in. Hoe zie je aan deze waarheidstabel dat $C \models D$ **niet** waar is?

Antwoord: Er is tenminste één rij in deze waarheidstabel waarin onder C 'True' staat, en onder D 'False'.
Nakijkcommentaar: .

(b) (1 punt) Stel dat Γ een verzameling formules is, en α een formule. Vul hieronder de juiste expressies in, bij (i) een verzameling, en bij (ii) een eigenschap daarvan:

$\Gamma \models \alpha$ desda de verzameling "...(i)..." "...(ii)..." is.

Antwoord: Het bedoelde antwoord is

(i) $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$

(ii) onvervulbaar

Nakijkcommentaar: .

(c) De volgende uitspraak is niet waar.
Redenering. *Voor alle formules A, B, C geldt: Als $(A \wedge B) \models C$, dan $A \models C$ en $B \models C$.*

i. (1 punt) Geef als tegenvoorbeeld propositielogische formules genaamd A, B en C.

Antwoord: Uit $(p \wedge q)$ volgt q, maar hoewel $p \models p$ waar is, is $q \models p$ onwaar.
Nakijkcommentaar: .

ii. (1 punt) Leg uit hoe die formules aantonen dat de uitspraak onwaar is. Hou in je uitleg rekening met de logische structuur van de uitspraak.

Antwoord: Deze formules tonen aan dat de implicatie **niet waar** is **voor alle** formules A, B en C, want de implicatie is niet waar voor $A = p$, $B = q$ en $C = p$: het antecedent is wél waar, maar het consequent niet.
Nakijkcommentaar: .

Antwoord: Neem bijvoorbeeld $A = p$, $B = q$ en $C = p$. Er geldt wél dat $(A \wedge B) \models C$, want p is waar in alle modellen waarin $p \wedge q$ waar is (dan zijn zowel p als q waar), maar hoewel $A \models C$ waar is (want p is waar als p waar is), is $B \models C$ niet waar, want p is niet altijd waar als q waar is. Omdat de implicatie niet waar is voor deze specifieke formules, is het niet zo dat hij waar is voor alle formules.
Nakijkcommentaar: .

3. **Propositielogica**

(a) (1 punt) Leg (bondig) uit waarom de lege disjunctie niet vervulbaar is.

Antwoord: Een disjunctie is waar als tenminste één van de disjuncten waar is. De lege disjunctie hééft geen disjuncten, en kan dus niet waar zijn, en is dus onvervulbaar.
Nakijkcommentaar: .

(b) Stel dat Γ een verzameling propositielogische formules is, en A en B formules zijn, zoals uitgelegd bij vraag 2. Stel je met de resolutiemethode wil achterhalen of $\Gamma \models (A \wedge B)$ waar is. De formule $(A \wedge B)$ volgt uit Γ desda A volgt uit Γ en B volgt uit Γ. Je onderzoekt met de resolutiemethode de verzameling $\Gamma \cup \{\neg A, \neg B\}$, waarvoor je eerst de formules in deze verzameling herschrijft naar een verzameling disjuncties.

i. (1 punt) Als je de lege disjunctie kunt afleiden uit deze verzameling disjuncties, mag je dan concluderen dat $\Gamma \models (A \wedge B)$ waar is? (Antwoord 'ja' of 'nee'.)

ii. (1 punt) Leg je antwoord op de vorige deelvraag uit.

Antwoord: Nee, dat mag niet. Je moet de vervulbaarheid onderzoeken van de verzameling met daarin de premissen (elementen van Γ) en de negatie van de conclusie $(A \wedge B)$. De negatie van $(A \wedge B)$ is $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$, dus je had de vervulbaarheid moeten onderzoeken van de verzameling $\Gamma \cup \{\neg A \vee \neg B\}$. Als je de vervulbaarheid onderzoekt van de verzameling $\Gamma \cup \{\neg A, \neg B\} = \Gamma \cup \{\neg A \wedge \neg B\} = \Gamma \cup \{\neg(A \vee B)\}$, onderzoek je of $\Gamma \models (A \vee B)$ waar is.
Nakijkcommentaar: .

(c) (2 punten) Onderzoek met de resolutiemethode of de volgende uitspraak waar is:

$$r \leftrightarrow (s \vee \neg p), (p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(p \vee s) \models r \vee (q \wedge \neg s).$$

Tip: Als je makkelijker zonder fouten een waarheidstabel maakt dan de resolutiemethode toepast, zou je (op kladpapier) een waarheidstabel kunnen maken om vast te stellen of de uitspraak waar is, zodat je weet waar je met de resolutiemethode op uit moet komen. Maar als antwoord moet je een uitwerking met de resolutiemethode inleveren.

Antwoord: We herschrijven eerst de premissen en de negatie van de conclusie naar conjuncties van disjuncties:

$$\begin{aligned}
r \leftrightarrow (s \vee \neg p) &\equiv (r \rightarrow (s \vee \neg p)) \wedge ((s \vee \neg p) \rightarrow r) \\
&\equiv (\neg r \vee (s \vee \neg p)) \wedge (\neg(s \vee \neg p) \vee r) \\
&\equiv (\neg r \vee s \vee \neg p) \wedge ((\neg s \wedge \neg\neg p) \vee r) \\
&\equiv (\neg r \vee s \vee \neg p) \wedge ((\neg s \wedge p) \vee r) \\
&\equiv (\neg r \vee s \vee \neg p) \wedge (\neg s \vee r) \wedge (p \vee r) \\
(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(p \vee s) &\equiv \neg(p \wedge \neg q) \vee \neg(p \vee s) \\
&\equiv (\neg p \vee \neg\neg q) \vee (\neg p \wedge \neg s) \\
&\equiv (\neg p \vee q) \vee (\neg p \wedge \neg s) \\
&\equiv ((\neg p \vee q) \vee \neg p) \wedge ((\neg p \vee q) \vee \neg s) \\
&\equiv (\neg p \vee q \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg s) \\
&\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg s) \\
\neg(r \vee (q \wedge \neg s)) &\equiv (\neg r \wedge \neg(q \wedge \neg s)) \\
&\equiv (\neg r \wedge (\neg q \vee \neg\neg s)) \\
&\equiv \neg r \wedge (\neg q \vee s)
\end{aligned}$$

We moeten dus de vervulbaarheid onderzoeken van de verzameling

$$F = \{\neg r \vee s \vee \neg p, \neg s \vee r, p \vee r, \neg p \vee q, \neg p \vee q \vee \neg s, \neg r, \neg q \vee s\},$$

en dat doen we met een resolutie-afleiding. Dat kan op verschillende manieren, een voorbeeld is dit:

1	$\neg r \vee s \vee \neg p$	element van F
2	$\neg s \vee r$	element van F
3	$p \vee r$	element van F
4	$\neg p \vee q$	element van F
5	$\neg p \vee q \vee \neg s$	element van F
6	$\neg r$	element van F
7	$\neg q \vee s$	element van F
8	p	resolvent van 3 en 6
9	$\neg s$	resolvent van 2 en 6
10	q	resolvent van 4 en 8
11	$\neg q$	resolvent van 7 en 9
12	$\square$	resolvent van 10 en 11

Dus de verzameling F is niet vervulbaar, dus de premissen kunnen niet samen met de *negatie* van de conclusie waar zijn, dus **als de premissen waar zijn** is de negatie van de conclusie onwaar, en **is dus de conclusie waar**, dus is de uitspraak waar.

Nakijkcommentaar: Wat ik een aantal keren heb gezien is dat men dacht dat de lege disjunctie $\Box$ afleidbaar is uit een combinatie van formules van de vorm $(A \vee B)$ en $(\neg A \vee \neg B)$. **Dat is níet het geval!** Uit die formules volgt $(B \vee \neg B)$, en ook $(A \vee \neg A)$, maar dat zijn tautologieën, dus die volgen overal uit, dat is dus niet zo interessant. Een soortgelijke fout is om uit $(A \vee B)$ en $(\neg A \vee \neg B \vee C)$ de formule C af te leiden. Dat mag ook niet! Maak maar een waarheidstabel als je me niet gelooft. Nog een variant die ik zag: foutief concluderen dat C volgt uit $(A \vee \neg B)$ en $(\neg A \vee B \vee C)$. In het bijzonder gebeurde dit soms bij de formules 5 en 7 hierboven: uit $\neg p \vee q \vee \neg s$ en $\neg q \vee s$ werd dan $\neg p$ geconcludeerd, maar **dat mag dus niet!** In alle modellen waarin p waar is, en q en s dezelfde waarde hebben (dus allebei waar of allebei onwaar), is $\neg p$ onwaar, terwijl de beide disjuncties waar zijn. Je voorkomt dit soort fouten door **één resolutiestap—dus resolutie op één paar complementaire variabelen—tegelijk** te doen, dus door niet op meerdere variabelen tegelijkertijd resolutie te willen doen, dat heeft niet het verwachte effect.

4. **Eerste-orde logica**

(a) (1 punt) Geef een formule die waar is in modellen waarin *precies twee* objecten bestaan met eigenschap P, en onwaar in modellen waarin $0, 1, 3, 4, \ldots$ objecten eigenschap P hebben).

Antwoord: Die formule drukt uit dat er een x is met eigenschap P en een y met eigenschap P, en dat x en y ongelijk aan elkaar zijn, en dat er geen z bestaat met eigenschap P die ongelijk aan x en y is:

$$\exists x \exists y (((P(x) \wedge P(y)) \wedge \neg(x = y)) \wedge \neg \exists z (P(z) \wedge (\neg(z = x) \wedge \neg(z = y))))$$

Nakijkcommentaar: Best veel mensen begonnen hun formule met $\forall x \forall y \ldots$, maar de uitspraak is juist dat er dingen **bestaan**, dus dan kan het bijna niet goed zijn als je niet met $\exists x \exists y$ begint.

(b) (1 punt) Een (binaire) relatie R op een verzameling A is 'anti-symmetrisch' als er geen twee verschillende objecten in A zijn die allebei met de ander in R zitten. (Een voorbeeld is deelbaarheid van gehele getallen.) Schrijf een predicaatlogische formule die dit uitdrukt.

Antwoord: Er bestaan geen x en y zodat als $R(x, y)$ waar is en x en y verschillend zijn, ook $R(y, x)$ waar is. Oftewel: voor alle x en y geldt dat als $(x, y) \in R$ en

$\neg(x = y)$, dan $(y, x) \notin R$.

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y((R(x,y) \land \neg(x = y)) \to \neg R(y,x)) \\
\equiv\ &\forall x \forall y(\neg(R(x,y) \land \neg(x = y)) \lor \neg R(y,x)) \\
\equiv\ &\forall x \forall y((\neg R(x,y) \lor \neg\neg(x = y)) \lor \neg R(y,x)) \\
\equiv\ &\forall x \forall y((\neg R(x,y) \lor (x = y)) \lor \neg R(y,x)) \\
\equiv\ &\forall x \forall y((\neg R(x,y) \lor \neg R(y,x)) \lor (x = y)) \\
\equiv\ &\forall x \forall y(\neg(R(x,y) \land R(y,x)) \lor (x = y)) \\
\equiv\ &\forall x \forall y((R(x,y) \land R(y,x)) \to (x = y))
\end{aligned}$$

Dus als $R(x, y)$ en $R(y, x)$ allebei waar zijn, is x gewoon gelijk aan y.

Verder met de tweede formule van boven ...

$$\begin{aligned}
\equiv\ &\forall x \forall y(\neg(R(x,y) \land \neg(x = y)) \lor \neg R(y,x)) \\
\equiv\ &\forall x \forall y \neg((R(x,y) \land \neg(x = y)) \land R(y,x)) \\
\equiv\ &\forall x \neg\exists y((R(x,y) \land \neg(x = y)) \land R(y,x)) \\
\equiv\ &\neg\exists x \exists y((R(x,y) \land \neg(x = y)) \land R(y,x)) \\
\equiv\ &\neg\exists x \exists y((R(x,y) \land R(y,x)) \land \neg(x = y))
\end{aligned}$$

Dus er bestaan geen x en y die ongelijk zijn ($\neg(x = y)$), zodat $R(x, y)$ en $R(y, x)$ allebei waar zijn.

Nakijkcommentaar: Je kunt dit dus, zoals hierboven geïllustreerd, uitdrukken als $\forall x \forall y(\ldots)$ en als $\neg\exists x \exists y(\ldots)$. Ik zag vaak dat in de tweede variant de fout werd gemaakt dat men schreef $\neg\exists x \neg\exists y(\ldots)$, maar dat betekent iets anders dan dat er geen x en y bestaan waarvoor (...) geldt, namelijk $\neg\exists x \neg\exists y A \equiv \neg\exists x \forall y \neg A$, dus dat er geen x bestaat zodat voor alle y A onwaar is.
Verder zag ik verschillende mensen dingen schrijven als $R(x, y) \neq R(y, x)$. Dat heeft geen betekenis, want $R(x, y)$ en $R(y, x)$ hebben, afhankelijk van waar x en y voor staan, een waarheidswaarde (True of False), dus het heeft geen betekenis om die met $=$ met elkaar te vergelijken. Je zou dat eventueel kunnen doen met $R(x, y) \leftrightarrow R(y, x)$ (maar daar heb je in deze context dus niets aan).

(c) (1 punt) Uit de premisse $\forall x \exists y\, P(x, y)$ volgt **niet** de conclusie $\exists z\, P(z, z)$. Geef een voorbeeld van een relatie die dit aantoont.

Antwoord: Bijvoorbeeld de relatie 'kleiner dan', $<$ op de gehele getallen. Er is wel voor elke x een y zodat $x < y$ waar is, maar er is geen z zodat $z < z$ waar is.

Nakijkcommentaar: .

(d) (2 punten) Laat met de resolutiemethode zien dat de volgende redenering geldig is.
Redenering. $\forall x(P(x) \to D(x)) \models \forall x(\exists y(P(y) \land S(x, y)) \to \exists y(D(y) \to S(x, y)))$

Tip: Herschrijf de benodigde formules naar conjuncties van disjuncties waarin alleen universeel gekwantificeerde variabelen voorkomen, en 'standaardiseer' de disjuncties 'apart'. Pas dan de resolutieregel toe, en geef daarbij aan welke substituties nodig zijn voor unificatie.

Antwoord: Je moet de premissen en de **negatie** van de conclusie herschrijven naar CNV.

$$
\begin{array}{ll}
\quad\forall x(P(x) \to D(x)) & \\
\equiv \forall x(\neg P(x) \lor D(x)) & \\
\equiv \forall z(\neg P(z) \lor D(z)) & \text{‘standardizing apart’} \\
\quad\neg\forall x(\exists y(P(y) \land S(x,y)) \to \exists y(D(y) \to S(x,y))) & \\
\equiv \exists x\neg(\exists y(P(y) \land S(x,y)) \to \exists y(D(y) \to S(x,y))) & \\
\equiv \exists x(\exists y(P(y) \land S(x,y)) \land \neg\exists y(D(y) \to S(x,y))) & \\
\equiv \exists x(\exists y(P(y) \land S(x,y)) \land \forall y\neg(D(y) \to S(x,y))) & \\
\equiv \exists x(\exists y(P(y) \land S(x,y)) \land \forall w\neg(D(w) \to S(x,w))) & \\
\equiv \exists x(\exists y(P(y) \land S(x,y)) \land \forall w(D(w) \land \neg S(x,w))) & \\
\equiv \exists x\exists y((P(y) \land S(x,y)) \land \forall w(D(w) \land \neg S(x,w))) & \\
\equiv \exists x\exists y\forall w((P(y) \land S(x,y)) \land (D(w) \land \neg S(x,w))) & \text{Prenex NV} \\
\simeq \quad \exists y\forall w((P(y) \land S(a,y)) \land (D(w) \land \neg S(a,w))) & x \text{ Skolemiseren} \\
\simeq \quad\quad \forall w((P(b) \land S(a,b)) \land (D(w) \land \neg S(a,w))) & y \text{ Skolemiseren} \\
\simeq \quad\quad\quad ((P(b) \land S(a,b)) \land (D(w) \land \neg S(a,w))) &
\end{array}
$$

Dus we moeten de vervulbaarheid onderzoeken van de verzameling (zonder universele kwantoren geschreven, dus alle variabelen zijn impliciet universeel gekwantificeerd):

$$F = \{\neg P(z) \lor D(z), P(b), S(a,b), D(w), \neg S(a,w)\}$$

Dat doen we met de resolutiemethode:

1	$\neg P(z) \lor D(z)$	element van F
2	$P(b)$	element van F
3	$S(a,b)$	element van F
4	$D(w)$	element van F
5	$\neg S(a,w)$	element van F
6	$\square$	resolvent van 3 en 5, met mgu $= \{w/b\}$

Dit is qua resolutie-afleiding makkelijker dan gepland. De vraag is niet de vraag die ik bedoelde te stellen, want de laatste implicatie had een $\land$ moeten zijn! Je moet normaal gesproken helemaal geen $\to$ gebruiken met $\exists$.

Nakijkcommentaar: Er zijn hier heel veel fouten gemaakt. Velen begonnen niet met het herschrijven van de **negatie van de conclusie**, maar met de conclusie zelf, en frommelden er achteraf nog een negatie voor. Dit moet je niet doen, want de negatie die je voor een formule met kwantoren plaatst, gaat die **kwantoren veranderen!** Als je $\forall x A$ herschrijft naar een vorm zonder kwantoren, dus met universeel gekwantificeerde variabelen, en je plakt er later een negatie voor, dan is die negatie ook universeel gekwantificeerd. Stel dat de conclusie luidt $\forall x P(x)$, dan staat die al in de Skolem normaalvorm, en kun je gewoon de $\forall x$ weg laten, en de x in $P(x)$ als impliciet universeel gekwantificeerd beschouwen. Maar als je er dán pas een negatie voor zet, krijg je $\neg P(x)$, wat eigenlijk staat voor $\forall x \neg P(x)$. Dat is heel wat anders dan je zou móeten krijgen, namelijk: $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$. De $\exists x$ verwijder je door voor x een Skolemconstante in te vullen, bijvoorbeeld a, en dan heb je $\neg P(a)$, terwijl je in de foute vorm $\forall x \neg P(x)$, die variabele x nog met allerlei andere termen zou mogen unificeren! Dat is dus heel wat anders, en klopt volstrekt niet!
Ik heb in elk geval een aantal van de meest gemaakte fouten gebruikt om de slides voor volgend jaar aan te passen, en de resolutie-methode in veel meer detail te beschrijven.

5. **Prolog**

(a) Prolog zoekt antwoorden op een query in een zekere graaf (in LPN 'search tree' genoemd).

i. (1 punt) Wat is in die graaf een *knoop*?

Antwoord: Een knoop is (of: bevat) een lijst met te bewijzen goals, negatieve literalen dus.
Nakijkcommentaar: Vaak geantwoord: een knoop is een feit (of rule) uit de KB.

ii. (1 punt) Wat is de relatie tussen knopen i en j als er een *kant* van i naar j bestaat?

Antwoord: Een knoop is een lijst met ≥ 0 goals. Er loopt alleen een kant van i weg als de lijst niet leeg is, want als de lijst leeg is, is de knoop een leaf. Noem de goals dus $i_1, i_2, \ldots$. Een kant van een knoop i naar een knoop j houdt in dat het eerste goal i_1 van de lijst in knoop i is vervuld, en bovendien welke variabele instantiatie(s) daarvoor nodig waren. Knoop j bevat de rest van de goals in knoop i, dus $i_2, \ldots$, met daaraan toegevoegd eventuele nieuwe goals die moeten worden vervuld om dat eerste goal van knoop i te vervullen. Dat eerste goal wordt *vervangen* door 0 of meer goals: 0 als het goal i_1 unificeerde met een fact, en ≥ 1 als het goal unificeerde met de head van een rule. De nieuw toegevoegde goals zijn dan de goal clauses in de body van die rule. Als een leaf node van de graaf 0 goals heeft representeert het een oplossing (het antwoord `true`), samen met alle variabele instantiaties die nodig waren om die leaf node te bereiken. Als een leaf node ≥ 1 goals bevat, is het geen oplossing (het antwoord `false`).

Nakijkcommentaar: Vaak gezien: als i waar is, is j waar, of "i impliceert j" oid. Het antwoord dat ik zocht heeft niemand gegeven. Iedereen dacht blijkbaar aan een graaf zoals ik op het college heb laten zien bij het bespreken van forward en baakbard search voor inferentie in de propositielogica. Een "search tree" in LPN is iets anders (zie het antwoord hierboven).

(b) (1 punt) Beschouw de volgende Prolog KB van 4 clauses (hier *naast* elkaar gezet):

```
k(X) :- f(X), g(X), h(X).        f(a).        g(a).        h(a).
```

Geef een *resolutie*-afleiding die laat zien wat er gebeurt bij de query `?- k(X).` Geef dus de clauses als logische formules, en maak in je afleiding duidelijk welke substituties nodig zijn.

Antwoord: De goal clause `?- k(X).` betekent dat dit een negatieve literaal is, dus *logisch gezien* is dit de disjunctie $\neg K(x)$. De drie facts in de KB zijn gewoon wat ze zijn: $F(a)$, $G(a)$, en $H(a)$, en de rule is

$$\begin{aligned} &(F(x) \wedge G(x) \wedge H(x)) \to K(x) \\ \equiv\ &\neg(F(x) \wedge G(x) \wedge H(x)) \vee K(x) \\ \equiv\ &\neg F(x) \vee \neg G(x) \vee \neg H(x) \vee K(x). \end{aligned}$$

Dus we moeten met resolutie laten zien wat er gebeurt.

1	$\neg F(x) \vee \neg G(x) \vee \neg H(x) \vee K(x)$	rule uit de KB
2	$F(a)$	feit uit de KB
3	$G(a)$	feit uit de KB
4	$H(a)$	feit uit de KB
5	$\neg K(x)$	negatieve goal literal
6	$\neg F(x) \vee \neg G(x) \vee \neg H(x)$	resolvent 1 en 5, $\{x/x\}$
7	$\neg G(a) \vee \neg H(a)$	resolvent 2 en 6, $\{x/a\}$
8	$\neg H(a)$	resolvent 3 en 7
9	$\square$	resolvent 4 en 8

Dus is de (negatieve) goal literaal niet waar als KB waar is, dus $K(x)$ is wél waar als de KB waar is (dus $K(x)$ volgt uit de KB—er bestaat een x zodat $K(x)$ waar is, namelijk $x = a$), en de benodigde substitutie is $\{x/a\}$.

Nakijkcommentaar: In sommige antwoorden waarin dit correct werd gedaan, deed men het niet op de manier waarop Prolog het doet. Prolog begint met het goal $\neg K(x)$ en kijkt waar dat mee unificeert, en vindt de rule (disjunctie 1 hierboven), waardoor disjunctie 6 overblijft. De logica in het algemeen is niet gebonden aan zo'n *doel-gerichte* benadering, maar kan ook vanuit de data redeneren—als het unificeert is het goed. Dan kun je bijvoorbeeld ook beginnen met disjuncties 1 en 2 te resolven. Dit is het verschil tussen backward search zoals Prolog het doet, en forward search.

(c) (2 punten) In een binaire boom heeft elke interne knoop precies twee kinderen. Een 'leaf' knoop is de kleinste binaire boom, met 0 kinderen. We representeren een leaf met de term `leaf(Naam)`, waar `Naam` de naam van de leaf is, en een boom met de term `tree(B1,B2)`, waar `B1` en `B2` binaire bomen zijn (dus leaves of bomen). Schrijf een Prolog predicaat `spiegel/2`, zodat `spiegel(B1,B2)` slaagt als `B2` het spiegelbeeld is van `B1`, zoals in:

```
?- spiegel(tree(leaf(a),tree(tree(leaf(b),leaf(c)),leaf(d))),T).
T = tree(tree(leaf(d), tree(leaf(c), leaf(b))), leaf(a)).
```

Antwoord:

```
spiegel(leaf(X),leaf(X)).
spiegel(tree(X,Y),tree(Ygespiegeld,Xgespiegeld)) :-
    spiegel(X,Xgespiegeld),
    spiegel(Y,Ygespiegeld).
```

Nakijkcommentaar: .

Einde tentamenopgaven