Tentamen: Inleiding meetkunde 2016/2017

Je mag gebruik maken van resultaten uit het boek/de colleges, mits je dit vermeldt en tenzij we je vragen ze opnieuw te bewijzen. Resultaten uit de opgaven van het boek/de werkcolleges moeten opnieuw bewezen worden. Je mag resultaten uit eerdere onderdelen gebruiken zonder die te hebben bewezen. Als je een hint gebruikt, bewijs deze dan.

Begin iedere opgave op een nieuw vel en Z.O.Z!

Opgave 1.

(a) **1 punt** Schrijf een puntspiegeling in zowel $\mathbb{E}^2$ als $\mathbb{E}^3$ als een samenstelling van lijn- respectievelijk vlakspiegelingen. Bepaal voor beide puntspiegelingen of het directe of indirecte isometrieën zijn.

(b) **1 punt** Stel Δ is een strikte driehoek in S^2 of een driehoek in $\mathcal{H}^2$. Stel Δ heeft een rechte hoek en zijden met lengte α, β, γ, waarbij γ tegenover de rechte hoek ligt. Geef een vergelijking die α, β, γ in elkaar uitdrukken.

(c) **1 punt** Stel $X_k := \{(P_1, \ldots, P_k) : P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{P}^1 \text{ onderling verschillend}\}$. Stel $k \geq 1$ en $f : X_k \to \mathbb{R}$ is een afbeelding met de eigenschap $f(T(P_1), \ldots, T(P_k)) = f(P_1, \ldots, P_k)$ voor iedere projectieve transformatie $T : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$. Bewijs dat f constant is voor $k = 1, 2, 3$.

Opgave 2. We beschouwen regelmatige veelhoeken in $\mathbb{E}^2, S^2, \mathcal{H}^2$. Een veelhoek is een vereniging van lijnsegmenten zodanig dat ieder uiteinde van een segment verbonden is met het uiteinde van een ander segment. Een regelmatige n-hoek is een veelhoek waarvan alle binnenhoeken even groot zijn en met n zijden die alle even lang zijn. (We nemen aan dat $n \geq 3$ en op S^2 nemen we aan dat de binnenhoeken kleiner dan π zijn.) Een betegeling met regelmatige veelhoeken bestaat uit een een overdekking van $\mathbb{E}^2, S^2, \mathcal{H}^2$ met regelmatige veelhoeken die alle congruent zijn en waarvoor ieder tweetal regelmatige veelhoeken disjunct is of elkaar snijdt in een zijde of een uiteinde van een zijde. Je mag in deze opgave gebruiken dat iedere regelmatige n-hoek wordt verkregen door herhaald een segment met uiteinde O te draaien rond O over een hoek $\frac{2\pi}{n}$.

(a) **1 punt** Gegeven een regelmatige betegeling van $\mathbb{E}^2$ met regelmatige n-hoeken, waarbij in ieder hoekpunt k regelmatige n-hoeken samenkomen. Bewijs dat $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$. Geef alle mogelijke betegelingen met regelmatige veelhoeken van $\mathbb{E}^2$ en bewijs je antwoord.

(b) **1 punt** Gegeven een regelmatige betegeling van $\mathcal{H}^2$ met regelmatige n-hoeken, waarbij in ieder hoekpunt k regelmatige n-hoeken samenkomen. Bewijs dat $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{2}$.

(c) **1 punt** Gegeven een regelmatige betegeling van S^2 met regelmatige n-hoeken, waarbij in ieder hoekpunt k regelmatige n-hoeken samenkomen. Bewijs dat $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} > \frac{1}{2}$. Vind alle oplossingen (n, k). Beschrijf (zonder bewijs) voor alle oplossingen een bijbehorende betegeling van S^2. *Hint: Gebruik (zonder bewijs) dat ieder platonisch veelvlak een omgeschreven bol door de hoekpunten heeft.*

Opgave 3. Gegeven lijnen L, M, N in $\mathbb{P}^3$ zodanig dat geen tweetal in een vlak ligt.

(a) $\frac{3}{2}$ **punt** Bewijs dat er oneindig veel lijnen zijn die L, M, N snijden. *Hint: Pak een punt* $P \in L$ *en beschouw* $\langle \{P\}, M \rangle$.

(b) $\frac{3}{2}$ **punt** Bewijs dat er homogene coördinaten zijn zodanig dat $L = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3 : x_0 = x_1 = 0\}$ en $M = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3 : x_2 = x_3 = 0\}$. *Hint: Beschouw de vlakken* $U, V \subset \mathbb{R}^4$ *die corresponderen met* L, M *en kies een geschikte basis van* $\mathbb{R}^4$ *gebruik makende van deze vlakken.*

(c) $\frac{1}{2}$ **punt** Bewijs dat er homogene coördinaten bestaan zodanig dat (b) geldt en bovendien $N = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3 : x_0 = x_2 \text{ en } x_1 = x_3\}$. *Hint: Beschouw* 4×4 *matrices die* U *en* V *uit de vorige opgave op zichzelf afbeelden. Welke vrijheidsgraden heb je over?*

(d) $\frac{1}{2}$ **punt** Gebruik de coördinaten van (b) en (c) om te bewijzen dat de vereniging van alle lijnen die L, M, N snijden liggen in de verzameling $Q := \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3 : x_0x_3 = x_1x_2\}$. *Hint: Pak een punt* $P = (0 : 0 : s : t) \in L$*, stel een vergelijking op voor* $\langle \{P\}, M \rangle$*, etc.*

Voor thuis: laat zien dat de omgekeerde inclusie in (d) ook geldt.

Voor thuis (moeilijker): Gegegeven vier lijnen L, M, N, N' in $\mathbb{P}^3$ zodanig dat geen tweetal ervan in een vlak ligt. Kun je (d) gebruiken om te bepalen hoeveel lijnen er zijn die L, M, N, N' snijden? *Hint: Doorsnijd* Q *uit onderdeel (d) met* N'.