Opgave 1. (a): Beschouw puntspiegeling in O in $\mathbb{E}^2$ en $\mathbb{E}^3$. Kies coördinaten zodat de oorsprong overeenkomt met O. Geval 1: $\mathbb{E}^2$, dan $(x,y) \mapsto (-x,-y)$. Lijnspiegeling in de x-as is $(x,y) \mapsto (x,-y)$ en lijnspiegeling in de y-as $(x,y) \mapsto (-x,y)$. De samenstelling is dus $(x,y) \mapsto (-x,-y)$. De matrix van deze isometrie is $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, heeft determinant 1 en is dus directe. $\mathbf{\frac{1}{2}}$ Geval 2: $\mathbb{E}^3$, dan $(x,y,z) \mapsto (-x,-y,-z)$. Vlakspiegeling in het yz-vlak is $(x,y,z) \mapsto (-x,y,z)$, vlakspiegeling in het xz-vlak is $(x,y,z) \mapsto (x,-y,z)$ en vlakspiegeling in het xy-vlak is $(x,y,z) \mapsto (x,y,-z)$. De samenstelling is dus $(x,y,z) \mapsto (-x,-y,-z)$. De matrix van deze isometrie is $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, heeft determinant -1 en is dus indirect. $\mathbf{\frac{1}{2}}$

(b): Cosinusregel S^2: $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$ (teken een plaatje). Invullen $a = \pi/2$ geeft $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma$. $\mathbf{\frac{1}{2}}$ Cosinusregel $\mathcal{H}^2$: $\cosh\alpha = \cosh\beta\cosh\gamma - \sinh\beta\sinh\gamma\cos a$ (teken een plaatje). Invullen $a = \pi/2$ geeft $\cosh\alpha = \cosh\beta\cosh\gamma$. $\mathbf{\frac{1}{2}}$

(c): Stel (P,Q,R), (P',Q',R') zijn twee 3-tuples van drie verschillende punten in $\mathbb{P}^1$. Dan bestaat er een (unieke) projectieve transformatie $T : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ zodanig dat $T(P) = P'$, $T(Q) = Q'$, $T(R) = R'$. Dus een functie $f : X_3 \to \mathbb{R}$ die invariant is onder projectieve transformaties is constant. $\mathbf{\frac{3}{4}}$ Voor $k = 2$ gaat dit vergelijkbaar: zij (P,Q), (P',Q') twee paren van verschillende punten. Kies voorts R verschillend aan P,Q en R' verschillend aan P',Q' dan krijgen we opnieuw een T als boven en trekken we dezelfde conclusie voor invariante $f : X_2 \to \mathbb{R}$. Voor $k = 1$ gaat dit evenzo (je hoeft dit niet uit te schrijven). $\mathbf{\frac{1}{4}}$

Opgave 2. (a): Gegeven een betegeling van $\mathbb{E}^2$ met regelmatige n-hoeken waarbij in ieder hoekpunt k veelhoeken samenkomen. Stel $n = 3$, dan hebben we een betegeling met regelmatige driehoeken die hoeken van grootte $\pi/3$ hebben en dus $k = 6$ en dus $1/3 + 1/6 = 1/2$. Stel $n \geq 4$. Pak een veelhoek uit de betegeling en "trianguleer" deze door lijnen vanuit O naar de vertices te trekken. De hoek O van zo een driehoek is $2\pi/n$. Zo een driehoek is gelijkbenig en dus zijn de andere twee hoeken gelijk aan $\pi/2 - \pi/n$ (teken een plaatje). $\mathbf{\frac{1}{4}}$ Als er k hoeken samenkomen dan $2\pi = 2k \cdot (\pi/2 - \pi/n)$, ofwel $1/n + 1/k = 1/2$. $\mathbf{\frac{1}{4}}$ Merk op: $1/k \geq 1/2 - 1/4 = 1/4$ dus $k \leq 4$ dus $k = 1,2,3,4$. Terug invullen geeft oplossingen $(n,k) = (6,3)$ en $(n,k) = (4,4)$. $\mathbf{\frac{1}{4}}$ Deze worden elk gerealiseerd: teken plaatje van betegelingen met regelmatige driehoeken, vierkanten en zeshoeken. $\mathbf{\frac{1}{4}}$

(b): Gegeven een betegeling van $\mathcal{H}^2$ met regelmatige n-hoeken waarbij in ieder hoekpunt k veelhoeken samenkomen. Stel $n \geq 4$. Pak een veelhoek uit de betegeling en "trianguleer" deze als voorheen. De hoek O van zo een (gelijkbenige) driehoek is $2\pi/n$. Voorts is de som van de hoeken van een hyperbolische driehoek $\pi - A$, waar $A > 0$ de hyperbolische oppervlakte is $\mathbf{\frac{1}{4}}$, en dus zijn de andere twee hoeken gelijk aan $\pi/2 - \pi/n - A/2$ (teken een plaatje). $\mathbf{\frac{1}{4}}$ Als er k hoeken samenkomen dan $2\pi = 2k \cdot (\pi/2 - \pi/n - A/2) < 2k \cdot (\pi/2 - \pi/n)$, ofwel $1/n + 1/k < 1/2$. $\mathbf{\frac{1}{4}}$ Stel $n = 3$ dan hebben we te maken met een betegeling met regelmatige driehoeken met hoek a die voldoet aan $3a = \pi - A$. Als er k hoeken samenkomen dan $2\pi = ka < k\pi/3$, dus $k > 6$ dus $1/n + 1/k = 1/3 + 1/k < 1/3 + 1/6 = 1/2$. $\mathbf{\frac{1}{4}}$

(c): Gegeven een betegeling van S^2 met regelmatige n-hoeken waarbij er in ieder hoekpunt k samenkomen. Stel $n \geq 4$. Pak een veelhoek uit de betegeling en "trianguleer" deze als voorheen. De hoek O van zo een (gelijkbenige) driehoek is $2\pi/n$. Voorts is de som van de hoeken van een boldriehoek $\pi + A$, waar $A > 0$ de oppervlakte is, en dus zijn de andere twee hoeken gelijk aan $\pi/2 - \pi/n + A/2$ (teken een plaatje). Als er k hoeken samenkomen dan $2\pi = 2k \cdot (\pi/2 - \pi/n + A/2) > 2k \cdot (\pi/2 - \pi/n)$, ofwel $1/n + 1/k > 1/2$. $\mathbf{\frac{1}{4}}$ Stel $n = 3$ dan hebben we te maken met een betegeling met regelmatige driehoeken met hoek a die voldoet aan $3a = \pi + A$. Als er k hoeken samenkomen dan $2\pi = ka > k\pi/3$, dus $k < 6$ dus $1/n + 1/k = 1/3 + 1/k > 1/3 + 1/6 = 1/2$. $\mathbf{\frac{1}{4}}$ In beide gevallen $1/k > 1/2 - 1/3 = 1/6$ en dus $k = 1, \ldots, 5$. Terug invullen geeft $(n, k) = (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)$. $\mathbf{\frac{1}{4}}$ Realiseer deze betegelingen door gnomonische projectie vanuit het middelpunt van de omgeschreven bol van (in volgorde): tetraëder, octaëder, icosaëder, kubus, dodecaëder met omgeschreven bol (informelere beschrijving toegestaan). $\mathbf{\frac{1}{4}}$

Opgave 3. (a): Merk op dat de lijnen L, M, N paarsgewijs disjunct zijn. Stel $P \in L$, dan is $\Pi := \langle \{P\}, M \rangle$ een vlak (dimensieformule). $\mathbf{\frac{1}{4}}$ Nu is N een lijn die niet in Π ligt want anders snijden N, M elkaar. $\mathbf{\frac{1}{4}}$ Dus $\langle \Pi, N \rangle$ heeft dimensie 3 en derhalve snijden Π, N elkaar in precies één punt Q (dimensieformule). $\mathbf{\frac{1}{2}}$ De lijn PQ snijdt L, N en ook M want PQ ligt in Π en elk tweetal lijnen in een vlak snijdt. $\mathbf{\frac{1}{4}}$ Variëren van P geeft oneindig veel lijnen. $\mathbf{\frac{1}{4}}$ Geen aftrek als dimensieformule niet expliciet vermeld wordt.

(b): Stel $L', M', N' \subset \mathbb{R}^4$ zijn de 2-dim. lineaire deelruimten die corresponderen met L, M, N. Dan $L' \cap M' = \{0\}$ want anders snijden L, M elkaar en liggen ze in een vlak. $\mathbf{\frac{1}{2}}$ Derhalve $\mathbb{R}^4 = L' + M'$ (dimensieformule). $\mathbf{\frac{1}{2}}$ We kunnen dus een basis voor M' kiezen en vervolgens een basis voor L' wat een basis voor $\mathbb{R}^4$ geeft, en t.o.v. deze basis $M' = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \times \{0\}$ en $L' = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}^2$. De bijbehorende homogene coördinaten zijn als gewenst. $\mathbf{\frac{1}{2}}$

(c) (pittig): Werk in $\mathbb{R}^4$. Beschouw inverteerbare 4×4 matrices van de vorm $T := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, waar we de blokken A, B noemen, wat inverteerbare 2×2 matrices zijn. Dan beeldt T L' op L' en M' op M' af en behouden we de eigenschappen van (b). Stel N' wordt voortgebracht door de vectoren $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$. Vorm de matrices $C := \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$ en $D := \begin{pmatrix} v_3 & w_3 \\ v_4 & w_4 \end{pmatrix}$. We zoeken oplossingen voor de matrixvergelijkingen $AC = \mathrm{id}_2$ en $BD = \mathrm{id}_2$, waar id_2 de 2×2 identiteit is. $\mathbf{\frac{1}{4}}$ Merk op: C is inverteerbaar want $(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), v, w$ zijn onafhankelijk (M, N snijden elkaar niet). Zo ook voor D. Neem: $A = C^{-1}$ en $B = D^{-1}$. De coördinaten gedefinieerd door T hebben de gewenste eigenschappen. $\mathbf{\frac{1}{4}}$

(d): Gebruik de notatie uit voorgaande onderdelen dan $P = (0 : 0 : s : t) \in L$ en $M = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \ : \ x_2 = x_3 = 0\}$. Het vlak Π uit (a) wordt dus gegeven door $\{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \ : \ sx_3 = tx_2\}$. $\mathbf{\frac{1}{4}}$ Nu $N = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \ : \ x_0 = x_2 \text{ en } x_1 = x_3\}$ en het punt Q uit (a) is $(s : t : s : t)$. De lijn door PQ wordt dus gegeven door

$\{(\nu s : \nu t : (\mu+\nu)s : (\mu+\nu)t) \ : \ (\mu,\nu) \neq (0,0)\}$ (college). Derhalve voldoen punten van PQ aan $x_0x_3 = x_1x_2$. $\mathbf{\frac{1}{4}}$