Hertentamen: Inleiding meetkunde 2016/2017

Je mag gebruik maken van resultaten uit het boek/de colleges, mits je dit vermeldt en tenzij we je vragen ze opnieuw te bewijzen. Resultaten uit de opgaven van het boek/de werkcolleges moeten opnieuw bewezen worden. Je mag resultaten uit eerdere onderdelen gebruiken zonder die te hebben bewezen. Als je een hint gebruikt, bewijs deze dan.

Opgave 1.

(a) **1 punt** Gegeven een driehoek ΔPQR in $\mathbb{E}^2$. Bewijs dat de middelloodlijnen van PQ, PR, QR elkaar snijden in een punt. Bewijs ook dat dit punt het middelpunt is van een cirkel door P, Q, R. *Hint: Een midelloodlijn van een lijnsegment is een lijn die door het midden van het lijnsegment gaat en er loodrecht op staat.*

(b) $\frac{3}{2}$ **punt** Beschouw punten $P = (t, x, y) = (\sqrt{3}, 0, -\sqrt{2})$ en $Q = (\sqrt{3}, 0, \sqrt{2})$ in $\mathcal{H}^2$. Vind een Lorentz-matrix zodanig dat t.o.v. de nieuwe coördinaten bepaald door deze matrix P gegeven wordt door $(1, 0, 0)$ en Q door $(\cosh\alpha, \sinh\alpha, 0)$. Bepaal ook de hyperbolische afstand α tussen P, Q. *Hint: Gebruik het hyperbolisch Gram-Schmidt-procédé. Je mag gebruiken dat in het boek/de colleges bewezen is dat dit de punten P, Q in de gewenste vorm zet.*

(c) $\frac{3}{2}$ **punt** Gegeven twee vlakken $\Pi_1, \Pi_2 \subset \mathbb{P}^5$, d.w.z. Π_1, Π_2 zijn 2-dimensionale projectief-lineaire deelruimten van $\mathbb{P}^5$. Is het mogelijk dat Π_1, Π_2 elkaar in precies één punt snijden? Zo ja, wat is dan de dimensie van $\langle \Pi_1, \Pi_2 \rangle$? Bewijs je antwoorden.

Opgave 2.

(a) $\frac{3}{2}$ **punt** Bewijs dat er geen isometrie van S^2 naar $\mathbb{E}^2$ bestaat. *Hint: Vind vier verschillende punten $N, P, Q, Z \in S^2$ met $d(N, P) = d(P, Z) = d(N, Q) = d(Q, Z) = 1$ en $d(N, Z) = 2$. Wat gebeurt er met zulke punten onder een isometrie $S^2 \to \mathbb{E}^2$?*

(b) $\frac{3}{2}$ **punt** Vindt een bijectie T van het bovenhalfrond

$$H = \{(x, y, z) \in S^2 \,:\, z > 0\}$$

naar $\mathbb{R}^2$ zodanig dat segmenten van grootcirkels in H worden afgebeeld op segmenten van rechte lijnen in $\mathbb{R}^2$. Bewijs je antwoord. Deze afbeelding heet gnomonische projectie. *Hint: Plaats een vlak dat raakt aan de noordpool en zendt lichstralen vanuit $(0, 0, 0)$ naar dit vlak. Hint: Om de bijectie op te schrijven mag je hoeken/bolcoördinaten gebruiken, i.e. $T : (\theta, \phi) \mapsto \cdots$.*

Opgave 3.

(a) $\frac{3}{2}$ **punt** Geef een affien-meetkundig bewijs (d.w.z. met vectoren) dat de drie zwaartelijnen van een driehoek in $\mathbb{R}^2$ elkaar snijden in een punt. Dit punt heet het zwaartepunt.

(b) $\frac{3}{2}$ **punt** Gegeven een affien-linear stelsel P, Q, R, S in $\mathbb{R}^3$. De driehoeken ΔPQR, ΔPQS, ΔPRS, ΔQRS hebben elk een zwaartepunt A, B, C, D. Bewijs dat de de lijnen AS, BR, CQ, DP elkaar snijden in een punt. *Hint: gebruik vectoren.*