Opgave 1. (a): Beschouw de middelloodlijn L_{PQ} op PQ. De punten op L_{PQ} hebben gelijke afstand tot P, Q. Zo ook voor L_{PR}, L_{QR}. De lijnen L_{PQ} en L_{PR} snijden elkaar in één punt Z en dit punt heeft dus gelijke afstand δ tot P, Q, R. Daarom ligt Z ook op L_{QR} en de drie middelloodlijnen gaan dus door Z. De cirkel met middelpunt Z en straal δ is per constructie de omgeschreven cirkel en gaat door P, Q, R. (Plaatje is handig.)

(b): We voeren het hyperbolisch Gram-Schmidt procédé uit (college). We weten dat dit P, Q in de gewenste vorm zet. Stel p, q zijn de vectoren die corresponderen met P, Q. Dan $\cosh\alpha = -p \cdot_L q = -(-3-2) = 5$. Dit bepaalt α. Definieer $f_0 = p$

$$\begin{aligned} v &:= q + (q \cdot_L f_0) f_0 = (\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}) + (-5)(\sqrt{3}, 0, -\sqrt{2}) = (-4\sqrt{3}, 0, 6\sqrt{2}), \\ f_1 &:= \frac{1}{\sqrt{24}}(-4\sqrt{3}, 0, 6\sqrt{2}) = (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{3}). \end{aligned}$$

De vector $(0,1,0)$ zit niet in de span van f_0, f_1, heeft Lorentz-lengte 1 en staat loodrecht op f_0, f_1. De gewenste matrix is $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$.

(c): Een vlak $\Pi \subset \mathbb{P}^5$ correspondeert met een 3-dimensionale lineaire deelruimte $V \subset \mathbb{R}^6$. Stel twee 3-dimensionale deelruimten $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^6$ elkaar snijden in een 1-dimensionale lineaire deelruimte. (Dit is te realizeren door 5 onafhankelijke vectoren u, v_1, v_2, w_1, w_2 te kiezen en te nemen $V_1 = \langle u, v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}}$, $V_2 = \langle u, w_1, w_2 \rangle_{\mathbb{R}}$.) De bijbehorende vlakken $\Pi_1, \Pi_2 \subset \mathbb{P}^5$ snijden elkaar dan in precies één punt. De dimensieformule geeft $\dim\langle \Pi_1, \Pi_2 \rangle = 2 + 2 - 0 = 4$.

Opgave 2. (a): Stel een isometrie $\phi : S^2 \to \mathbb{E}^2$ bestaat. Kies $N = (0,0,1), P = (1,0,0), Q = (0,1,0), Z = (0,0,-1) \in S^2$. Dan $N, P, Q, Z \in S^2$ en $d(N,P) = d(N,Q) = d(Z,P) = d(Z,Q) = 1$ en $d(N,Z) = 2$. Derhalve zijn $N' = \phi(N)$, $P' = \phi(P)$, $Q' = \phi(Q)$, $Z' = \phi(Z)$ (verschillende) punten in $\mathbb{E}^2$ met de eigenschap dat $d(N', P') = d(P', Z') = 1$, $d(N', Q') = d(Q', Z') = 1$ en $d(N', Z') = 2$. De driehoeksongelijkheid op $\mathbb{E}^2$ impliceert dat het drietal N', P', Z' op een lijn ligt en zo ook voor N', Q', Z'. Er gaat maar één lijn door N', Z' en dus liggen N', Z', P', Q' alle op een lijn. Derhalve $P' = Q'$ omdat ze beide afstand 1 tot zowel N' als Z' hebben. Maar $P \neq Q$ en ϕ is een bijectie; tegenspraak.

(b): Beschouw $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ en het vlak $V := \{z = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ dat S^2 raakt aan de noordpool. We kiezen de standaard bolcoördinaten $(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}_{>0} \times [0, 2\pi) \times [0, \pi)$ op $\mathbb{R}^3$. In het vlak V kiezen we coordinaten (x, y), t.o.v. de vectoren $(1,0,1), (0,1,1) \in V$. (Plaatje is handig.) Voor gegeven $(\theta, \phi) \in [0, 2\pi) \times [0, \frac{\pi}{2}) \leftrightarrow H$ snijdt de lijn L bepaald door deze hoeken het vlak V in een uniek punt P. De afstand van dit punt tot de z-as is $\tan\phi$. Beschouw P als punt in het (x, y)-vlak bepaald door V. De vector bepaald door P maakt hoek θ met de x-as en heeft lengte $\tan\phi$ en $(x, y) = (\cos\theta \tan\phi, \sin\theta \tan\phi)$. Derhalve $T(\theta, \phi) = (\cos\theta \tan\phi, \sin\theta \tan\phi)$. Het is duidelijk dat deze afbeelding een bijectie $T : H \to \mathbb{R}^2$ geeft. (Geen aftrek als dit niet algebraïsch bewezen wordt.) Een grootcirkelsegment in $H \subset S^2$ wordt bepaald door een vlak $\Pi \subset \mathbb{R}^3$. Per constructie beeldt T dit af op de lijn $\Pi \cap V$. Derhalve beeldt T grootcirkelsegmenten in H af op lijnsegmenten in $V \cong \mathbb{R}^2$.

Opgave 3. (a): Gebruik vectoren $p, q, r \in \mathbb{R}^2$ voor de hoekpunten van de driehoek. Claim: $z = \frac{1}{3}p + \frac{1}{3}q + \frac{1}{3}r$ is het snijpunt van de zwaartelijnen. Het middelpunt van de zijde QR is $\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}r$. De zwaartelijn door P en QR wordt geparametriseerd door

$$(1-t)p + t\Big(\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}r\Big), \; t \in [0,1].$$

Neem $t = \frac{2}{3}$ en we zien dat z op de zwaartelijn door P ligt. Vanwege de symmetrie van het probleem zien we dat z ook op de andere zwaartelijnen ligt.

(b): Gebruik vectoren $p, q, r, s, a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ voor de punten P, Q, R, S, A, B, C, D. Claim: $z = \frac{1}{4}p + \frac{1}{4}q + \frac{1}{4}r + \frac{1}{4}s$ is het snijpunt van de lijnen AS, BR, CQ, DP. Merk op dat het bewijs van onderdeel (a) geldt voor driehoeken in $\mathbb{R}^3$. Derhalve weten we dat

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{3}p + \frac{1}{3}q + \frac{1}{3}r \\ b &= \frac{1}{3}p + \frac{1}{3}q + \frac{1}{3}s \\ c &= \frac{1}{3}p + \frac{1}{3}r + \frac{1}{3}s \\ d &= \frac{1}{3}q + \frac{1}{3}r + \frac{1}{3}s. \end{aligned}$$

De lijn AS wordt daarom geparametriseerd door

$$(1-t)s + t\Big(\frac{1}{3}p + \frac{1}{3}q + \frac{1}{3}r\Big), \; t \in [0,1]$$

Neem $t = \frac{3}{4}$, dan zien we dat z inderdaad op de lijn AS ligt. Vanwege de symmetrie van het probleem zien we dat z ook op BR, CQ, DP ligt.

Terzijde: tijdens het vinden van de juiste waarde van t wil je wellicht de vergelijking $1 - t = \frac{1}{3}t$ oplossen, wat $t = \frac{3}{4}$ geeft.