Introduction to Geometry: retake exam

July 4th, 2018

- Use a separate sheet for each exercise!
- Distribution of points: **Q1: 1.5**, **Q2: 3** (1+1+1), **Q3: 3** (1 + 1 + 1), **Q4: 2.5 (1+1.5)**. This distribution does not necessarily represent how difficult a problem is.
- Write your name and student number clearly on ever piece of paper.
- Books, notes, computers, tablets, mobile phones or any other materials or electronic devices are forbidden.
- Do not just provide answers, but with each (partial) assignment show and reason clearly how you arrive at that step; when you claim something, prove it.
- Even if you cannot prove one part of the assignment, you are allowed to use that result later on.

Question 1

Let $\triangle ABC$ be a spherical triangle, such that the side lengths α, β, γ are equal and strictly between 0 and π. Prove that the angles of the triangle are all equal and strictly larger than $\frac{1}{3}\pi$ (or 60°).

Question 2

In this question we consider the hyperboloid model $\mathcal{H}^2$. Define $O = (1, 0, 0) \in \mathcal{H}^2$ and let $s > 0$ be a real number. We define the hyperbolic circle with center O and radius s as:

$$C_s = \{X \in \mathcal{H}^2 \mid d_{\mathcal{H}^2}(O, X) = s\}.$$

(a) By showing both inclusions, prove that

$$C_s = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid t = \cosh(s) \text{ and } \sqrt{x^2 + y^2} = \sinh(s)\}.$$

It follows that the perimeter of C_s equals $2\pi \sinh(s)$. In particular, it follows that in hyperbolic geometry the perimeter of a circle grows exponentially with the radius. The area A_s of a hyperbolic disk with center O and radius s can now be computed as $A_s = \int_0^s 2\pi \sinh x \, \mathrm{d}x$.

(b) Prove that $A_s = 2\pi(\cosh s - 1)$, and next compute the limit

$$\lim_{s \to \infty} \frac{A_{s-1}}{A_s}.$$

You may use without proof that

$$\lim_{s \to \infty} 2(\cosh s - 1)e^{-s} = 1.$$

(c) What part of the area of a large disk in the hyperbolic plane lies at distance at most 1 from the boundary? Answer the same question for the Euclidean plane.

Question 3

Let $P, Q \in \mathbb{E}^2$ be distinct fixed points. The goal of this exercise is to show that every translation in $\mathbb{E}^2$ is a composite of rotations about P and Q.

(a) Show that for any angle θ, the composition

$$\mathrm{Rot}(P, \theta) \circ \mathrm{Rot}(Q, -\theta)$$

is a translation. Determine the translation vector.

(b) Show that every translation in the same direction as $\overrightarrow{PQ}$ is a composite of finitely many rotations about P and Q.
(Hint: to make life easier, work in a suitable coordinate system.)

(c) Show that every translation (with arbitrary direction) is a composite of rotations about P and Q.

Question 4

(a) Let $V, W \subset \mathbb{R}^n$ denote two affine linear subspaces. Define the affine span $\langle V, W \rangle$ of V and W.

(b) Consider the two planes:

$$\Pi_1 := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x - 2y + 3z = 2\right\}$$
$$\Pi_2 := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z - y = 1\right\}.$$

Compute their intersection $\Pi_1 \cap \Pi_2$ and their affine span $\langle \Pi_1, \Pi_2 \rangle$, and check whether they satisfy $\dim(\Pi_1 \cap \Pi_2) = \dim(\Pi_1) + \dim(\Pi_2) - \dim\langle \Pi_1, \Pi_2 \rangle$.

- Elke opgave op een apart blaadje.
- Puntenverdeling als volgt: **V1: 1.5**, **V2: 3** (1+1+1), **V3: 3** (1 + 1 + 1), **V4: 2.5 (1+1.5)**. Let op dat moeilijkheidsgraad niet per definitie gelijk opgaat met de hoeveelheid punten.
- Schrijf duidelijk je naam en studentnummer op elk blaadje.
- Geen hulpmiddelen zoals boeken of elektronische apparaten zoals computers of tablets toegestaan.
- Beargumenteer tussenstappen zoveel mogelijk, zorg ook dat je alles wat je claimt eerst bewijst.
- Als een bepaald bewijs niet lukt in een deelopgave, dan mag je het resultaat nog steeds later gebruiken in een latere deelopgave.

Opgave 1

Zij $\triangle ABC$ een boldriehoek, waarvan de zijden α, β, γ gelijk zijn en strikt tussen 0 en π zitten. Bewijs dat de hoeken van de driehoek even groot zijn, en dat ze strikt groter zijn dan $\frac{1}{3}\pi$ (of $60°$).

Opgave 2

In deze opgave bekijken we het hyperboloïde model $\mathcal{H}^2$. Definieer $O = (1, 0, 0) \in \mathcal{H}^2$ en zij $s > 0$ een reëel getal. We definiëren the hyperbolische cirkel met middelpunt O en straal s als:

$$C_s = \{X \in \mathcal{H}^2 \mid d_{\mathcal{H}^2}(O, X) = s\}.$$

(a) Toon aan, door beide inclusies te bewijzen, dat

$$C_s = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid t = \cosh(s) \text{ en } \sqrt{x^2 + y^2} = \sinh(s)\}.$$

Er volgt dat de omtrek van C_s in $\mathcal{H}^2$ gelijk is aan $2\pi \sinh(s)$. In het bijzonder zien we dat, in hyperbolische meetkunde, de omtrek van een cirkel exponentieel toeneemt met de straal. De oppervlakte A_s van een hyperbolische schijf met middelpunt O en straal s can nu berekend worden als $A_s = \int_0^s 2\pi \sinh x \, \mathrm{d}x$.

(b) Laat zien dat $A_s = 2\pi(\cosh s - 1)$, en bereken vervolgens de limiet

$$\lim_{s\to\infty} \frac{A_{s-1}}{A_s}.$$

Je mag hierbij zonder bewijs gebruiken dat

$$\lim_{s\to\infty} 2(\cosh s - 1)e^{-s} = 1.$$

(c) Welk deel van de oppervlakte van een grote schrijf in het hyperbolische vlak ligt op afstand hoogstens 1 van de rand? Beantwoord dezelfde vraag voor het Euclische vlak.

Opgave 3

Zij $P, Q \in \mathbb{E}^2$ verschillende vaste punten. Het doel van deze opgave is om te laten zien dat elke translatie in $\mathbb{E}^2$ gelijk is aan de samenstelling van rotaties rond P en Q.

(a) Laat zien dat voor elke hoek θ de samenstelling

$$\mathrm{Rot}(P,\theta) \circ \mathrm{Rot}(Q,-\theta)$$

een translatie is. Bepaal de translatievector.

(b) Laat zien dat elke translate in dezelfde richting als $\overrightarrow{PQ}$ gelijk is aan een samenstelling van een eindig aantal rotaties rond P en Q. (Hint: gebruik een geschikt coordinatenstelsel.)

c) Laat zien dat elke translatie (in willekeurige richting) een samenstelling is van rotaties rond P en Q.

Opgave 4

(a) Bekijk affien lineaire deelruimten $V, W \subset \mathbb{R}^n$. Definieer het affiene opspansel $\langle V, W \rangle$ van V en W.

(b) Bekijk de twee vlakken

$$\begin{aligned} \Pi_1 &:= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x - 2y + 3z = 2\right\} \\ \Pi_2 &:= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z - y = 1\right\}. \end{aligned}$$

Bereken hun doorsnede $\Pi_1 \cap \Pi_2$ en hun affiene opspansel $\langle \Pi_1, \Pi_2 \rangle$. Ga verder na of $\dim(\Pi_1 \cap \Pi_2) = \dim(\Pi_1) + \dim(\Pi_2) - \dim\langle \Pi_1, \Pi_2 \rangle$.