Introduction to Geometry: retake exam

July 4th, 2018

- Use a separate sheet for each exercise!
- Distribution of points: **Q1: 1.5**, **Q2: 3** (1+1+1), **Q3: 3** $(1 + 1 + 1)$, **Q4: 2.5 (1+1.5)**. This distribution does not necessarily represent how difficult a problem is.
- Write your name and student number clearly on ever piece of paper.
- Books, notes, computers, tablets, mobile phones or any other materials or electronic devices are forbidden.
- Do not just provide answers, but with each (partial) assignment show and reason clearly how you arrive at that step; when you claim something, prove it.
- Even if you cannot prove one part of the assignment, you are allowed to use that result later on.

Question 1

Let $\triangle ABC$ be a spherical triangle, such that the side lengths α, β, γ are equal and strictly between 0 and π. Prove that the angles of the triangle are all equal and strictly larger than $\frac{1}{3}\pi$ (or $60°$).

Question 2

In this question we consider the hyperboloid model $\mathcal{H}^2$. Define $O = (1, 0, 0) \in \mathcal{H}^2$ and let $s > 0$ be a real number. We define the hyperbolic circle with center O and radius s as:

$$C_s = \{X \in \mathcal{H}^2 \mid d_{\mathcal{H}^2}(O, X) = s\}.$$

(a) By showing both inclusions, prove that

$$C_s = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid t = \cosh(s) \text{ and } \sqrt{x^2 + y^2} = \sinh(s)\}.$$

It follows that the perimeter of C_s equals $2\pi \sinh(s)$. In particular, it follows that in hyperbolic geometry the perimeter of a circle grows exponentially with the radius. The area A_s of a hyperbolic disk with center O and radius s can now be computed as $A_s = \int_0^s 2\pi \sinh x \, \mathrm{d}x$.

(b) Prove that $A_s = 2\pi(\cosh s - 1)$, and next compute the limit

$$\lim_{s \to \infty} \frac{A_{s-1}}{A_s}.$$

You may use without proof that

$$\lim_{s \to \infty} 2(\cosh s - 1)e^{-s} = 1.$$

(c) What part of the area of a large disk in the hyperbolic plane lies at distance at most 1 from the boundary? Answer the same question for the Euclidean plane.

Question 3

Let $P, Q \in \mathbb{E}^2$ be distinct fixed points. The goal of this exercise is to show that every translation in $\mathbb{E}^2$ is a composite of rotations about P and Q.

(a) Show that for any angle θ, the composition

$$\mathrm{Rot}(P, \theta) \circ \mathrm{Rot}(Q, -\theta)$$

is a translation. Determine the translation vector.

(b) Show that every translation in the same direction as $\overrightarrow{PQ}$ is a composite of finitely many rotations about P and Q.
(Hint: to make life easier, work in a suitable coordinate system.)

(c) Show that every translation (with arbitrary direction) is a composite of rotations about P and Q.

Question 4

(a) Let $V, W \subset \mathbb{R}^n$ denote two affine linear subspaces. Define the affine span $\langle V, W\rangle$ of V and W.

(b) Consider the two planes:

$$\Pi_1 := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x - 2y + 3z = 2\right\}$$
$$\Pi_2 := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z - y = 1\right\}.$$

Compute their intersection $\Pi_1 \cap \Pi_2$ and their affine span $\langle \Pi_1, \Pi_2\rangle$, and check whether they satisfy $\dim(\Pi_1 \cap \Pi_2) = \dim(\Pi_1) + \dim(\Pi_2) - \dim\langle \Pi_1, \Pi_2\rangle$.

- Elke opgave op een apart blaadje.
- Puntenverdeling als volgt: **V1: 1.5**, **V2: 3** (1+1+1), **V3: 3** (1 + 1 + 1), **V4: 2.5 (1+1.5)**. Let op dat moeilijkheidsgraad niet per definitie gelijk opgaat met de hoeveelheid punten.
- Schrijf duidelijk je naam en studentnummer op elk blaadje.
- Geen hulpmiddelen zoals boeken of elektronische apparaten zoals computers of tablets toegestaan.
- Beargumenteer tussenstappen zoveel mogelijk, zorg ook dat je alles wat je claimt eerst bewijst.
- Als een bepaald bewijs niet lukt in een deelopgave, dan mag je het resultaat nog steeds later gebruiken in een latere deelopgave.

Opgave 1

Zij $\triangle ABC$ een boldriehoek, waarvan de zijden α, β, γ gelijk zijn en strikt tussen 0 en π zitten. Bewijs dat de hoeken van de driehoek even groot zijn, en dat ze strikt groter zijn dan $\frac{1}{3}\pi$ (of $60°$).

Opgave 2

In deze opgave bekijken we het hyperboloïde model $\mathcal{H}^2$. Definieer $O = (1, 0, 0) \in \mathcal{H}^2$ en zij $s > 0$ een reëel getal. We definiëren the hyperbolische cirkel met middelpunt O en straal s als:

$$C_s = \{X \in \mathcal{H}^2 \mid d_{\mathcal{H}^2}(O, X) = s\}.$$

(a) Toon aan, door beide inclusies te bewijzen, dat

$$C_s = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid t = \cosh(s) \text{ en } \sqrt{x^2 + y^2} = \sinh(s)\}.$$

Er volgt dat de omtrek van C_s in $\mathcal{H}^2$ gelijk is aan $2\pi \sinh(s)$. In het bijzonder zien we dat, in hyperbolische meetkunde, de omtrek van een cirkel exponentieel toeneemt met de straal. De oppervlakte A_s van een hyperbolische schijf met middelpunt O en straal s can nu berekend worden als $A_s = \int_0^s 2\pi \sinh x \, \mathrm{d}x$.

(b) Laat zien dat $A_s = 2\pi(\cosh s - 1)$, en bereken vervolgens de limiet

$$\lim_{s \to \infty} \frac{A_{s-1}}{A_s}.$$

Je mag hierbij zonder bewijs gebruiken dat

$$\lim_{s \to \infty} 2(\cosh s - 1)e^{-s} = 1.$$

(c) Welk deel van de oppervlakte van een grote schrijf in het hyperbolische vlak ligt op afstand hoogstens 1 van de rand? Beantwoord dezelfde vraag voor het Euclische vlak.

Opgave 3

Zij $P, Q \in \mathbb{E}^2$ verschillende vaste punten. Het doel van deze opgave is om te laten zien dat elke translatie in $\mathbb{E}^2$ gelijk is aan de samenstelling van rotaties rond P en Q.

(a) Laat zien dat voor elke hoek θ de samenstelling

$$\mathrm{Rot}(P, \theta) \circ \mathrm{Rot}(Q, -\theta)$$

een translatie is. Bepaal de translatievector.

(b) Laat zien dat elke translate in dezelfde richting als $\overrightarrow{PQ}$ gelijk is aan een samenstelling van een eindig aantal rotaties rond P en Q. (Hint: gebruik een geschikt coordinatenstelsel.)

c) Laat zien dat elke translatie (in willekeurige richting) een samenstelling is van rotaties rond P en Q.

Opgave 4

(a) Bekijk affien lineaire deelruimten $V, W \subset \mathbb{R}^n$. Definieer het affiene opspansel $\langle V, W \rangle$ van V en W.

(b) Bekijk de twee vlakken

$$\Pi_1 := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x - 2y + 3z = 2\right\}$$
$$\Pi_2 := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z - y = 1\right\}.$$

Bereken hun doorsnede $\Pi_1 \cap \Pi_2$ en hun affiene opspansel $\langle \Pi_1, \Pi_2 \rangle$. Ga verder na of $\dim(\Pi_1 \cap \Pi_2) = \dim(\Pi_1) + \dim(\Pi_2) - \dim\langle \Pi_1, \Pi_2 \rangle$.

Question 1

Let a be the angle at A, than the main formula of spherical trig is $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$. Because the side lengths are equal, we get $\cos\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos a$, and since $0 < \alpha < \pi$, we can divide by $\sin\alpha$ to get

$$\cos a = \frac{\cos\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \left(= \frac{\cos\alpha - \cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha + 1} \right).$$

We obtain the same expressions for $\cos b, \cos c$, so these cosines are equal. Because the angles are at most π, we conclude that the angles are equal.
Because the sum of the angles is equal to π plus the area of the triangle, we see that all angles are larger than $\frac{1}{3}\pi$.
Alternatively we can use the formula $\cos a = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha+1} = 1 - \frac{1}{\cos\alpha+1}$. Because $0 < \cos\alpha + 1 < 2$, we get $\cos a < 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, from which we can conclude that $a > \frac{1}{3}\pi$.

Question 2

(a) First, suppose that we have a point $(t,x,y) \in C_s$. Then $s = d_{\mathcal{H}^2}(O,(t,x,y)) = \operatorname{arccosh}(-(1,0,0)\cdot_L (t,x,y)) = \operatorname{arccosh} t$. Since $t > 0$, it follows that $t = \cosh s$. Since $(t,x,y) \in \mathcal{H}^2$, we find $x^2 + y^2 = t^2 - 1 = \cosh^2 s - 1 = \sinh^2 s$. Since $s > 0$, we have $\sinh s > 0$, so it follows that $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\sinh^2 s} = \sinh s$, as desired.

Conversely, suppose that we have a point $(t,x,y) \in \mathbb{R}^3$ satisfying $t = \cosh(s)$ and $\sqrt{x^2+y^2} = \sinh(s)$. First of all, we see that $t^2 - x^2 - y^2 = \cosh^2 s - \sinh^2 s = 1$ and $t = \cosh(s) > 0$, so $(t,x,y) \in \mathcal{H}^2$. Furthermore, we can compute that $d_{\mathcal{H}^2}(O,(t,x,y)) = \operatorname{arccosh}((1,0,0)\cdot_L (t,x,y)) = \operatorname{arccosh} t = \operatorname{arccosh}(\cosh s) = |s| = s$, so (t,x,y) lies on C_s, as desired.

(b) Since $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh x = \sinh x$, we see that

$$A_s = \int_0^s 2\pi\sinh x \,\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^s \sinh x\,\mathrm{d}x = 2\pi(\cosh s - \cosh 0) = 2\pi(\cosh s - 1).$$

We know that $\lim_{s\to\infty} 2(\cosh s - 1)e^{-s}$ and $\lim_{s\to\infty} 2(\cosh(s-1)-1)e^{1-s}$ both exist and are equal to 1. It follows that

$$\begin{aligned}\lim_{s\to\infty}\frac{A_{s-1}}{A_s} &= \lim_{s\to\infty}\frac{2\pi(\cosh(s-1)-1)}{2\pi(\cosh s - 1)} = \lim_{s\to\infty}\frac{1}{e}\cdot\frac{2(\cosh(s-1)-1)e^{1-s}}{2(\cosh s-1)e^{s}} \\ &= \frac{1}{e}\cdot\frac{\lim_{s\to\infty}2(\cosh(s-1)-1)e^{1-s}}{\lim_{s\to\infty}2(\cosh s-1)e^{s}} = \frac{1}{e}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

(c) If we consider a disk with radius s, then the area of the portion of the disk with distance at most 1 from the boundary is equal to $A_s - A_{s-1}$. The fraction of this area compared to the area of the entire disk is equal to $\frac{A_s - A_{s-1}}{A_s} = 1 - \frac{A_{s-1}}{A_s}$. By exercise (b), this is approximately equal to $1 - \frac{1}{e} \approx 0.63$ when s is very large. For the Euclidean plane, we can perform the same calculations, but now with the formula $A_s = \pi s^2$. We see that $1 - \frac{A_{s-1}}{A_s} = 1 - \frac{\pi(s-1)^2}{\pi s^2} = 1 - \frac{(s-1)^2}{s^2}$, which is approximately 0 for s very large.

Question 3

(a) Let us proceed in coordinates. In order to write down what a rotation about a point different from the origin is, recall that: $\mathrm{Rot}\,(P,\theta) = \mathrm{Trans}\,(\mathbf{p}) \circ \mathrm{Rot}\,(0,\theta) \circ \mathrm{Trans}\,(-\mathbf{p})$, where $\mathbf{p}$ is the position vector of the point P (geometrically, that means we are shifting the rotation from the point to the origin, we perform the rotation, and then we shift it back to its original position). Then,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rot}\,(P,\theta)\,(\mathbf{x}) &= \mathrm{Trans}\,(\mathbf{p}) \circ \mathrm{Rot}\,(0,\theta)\,(\mathbf{x}-\mathbf{p}) \\
&= \mathrm{Trans}\,(\mathbf{p}) \left[\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} (\mathbf{x}-\mathbf{p}) \right] \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} (\mathbf{x}-\mathbf{p}) + \mathbf{p} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix} \mathbf{p}
\end{aligned}$$

And for $\mathrm{Rot}\,(Q,-\theta)$,

$$\mathrm{Rot}\,(Q,-\theta)\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1-\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix} \mathbf{q}$$

where $\mathbf{q}$ is the position vector of Q. Composing both, we get:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rot}\,(P,\theta) \circ \mathrm{Rot}\,(Q,-\theta)\,\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mathbf{x} \\
&+ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix} \mathbf{q} + \begin{pmatrix} 1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix} \mathbf{p} \\
&= \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{pmatrix} \mathbf{q} + \begin{pmatrix} 1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix} \mathbf{p}
\end{aligned}$$

This composition of transformations leaves invariant $\mathbf{x}$ and adds to it a certain vector - it has clearly the shape of a translation. The translation vector is in this case: $\begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{pmatrix} \mathbf{q} + \begin{pmatrix} 1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix} \mathbf{p}$.

(b) Let us choose, without loss of generality, P to be the origin and $Q = (1,0)$. Then, $\mathbf{p} = 0$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $\overrightarrow{\mathbf{pq}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Then, similarly to what we have done in a), we see that:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rot}\,(Q,-\theta) \circ \mathrm{Rot}\,(P,\theta)\,\mathbf{x} &= \mathrm{Rot}\,(Q,-\theta) \left[\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mathbf{x} \right] \\
&= \mathrm{Trans}\,(\mathbf{q}) \circ \mathrm{Rot}\,(0,-\theta) \left[\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mathbf{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \mathrm{Trans}\,(\mathbf{q}) \left[\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mathbf{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right] \\
&= \mathrm{Trans}\,(\mathbf{q}) \left[\mathbf{x} - \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \right] = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1-\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Using this, if we compute the composition $\mathrm{Rot}\,(Q,\theta)\circ\mathrm{Rot}\,(P,-\theta)\circ\mathrm{Rot}\,(Q,-\theta)\circ\mathrm{Rot}\,(P,\theta)$, we obtain that:

$$\mathrm{Rot}\,(Q,\theta)\circ\mathrm{Rot}\,(P,-\theta)\circ\mathrm{Rot}\,(Q,-\theta)\circ\mathrm{Rot}\,(P,\theta)\,\mathbf{x}=\mathbf{x}+2\,(1-\cos\theta)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Meaning, performing this composition of rotations about P and Q we obtain a translation by a vector in the same direction as $\overrightarrow{\mathbf{pq}}$.

Varying θ from 0 to π, the translation vector varies from 0 to $2\overrightarrow{\mathbf{pq}}$. Composing these vectors we can obtain all translations $\lambda\overrightarrow{\mathbf{pq}}$ with λ positive. To obtain negative λ's, we use the inverse of the translation over $2\,(1-\cos\theta)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, which is given by

$$\mathrm{Rot}(P,-\theta)\circ\mathrm{Rot}(Q,\theta)\circ\mathrm{Rot}(P,\theta)\circ\mathrm{Rot}(Q,-\theta).$$

(c) We still work in the coordinate system of part (b). The translation obtained in part (a) is then a translation over $\begin{pmatrix}\cos\theta-1\\\sin\theta\end{pmatrix}$. Note that $\cos\theta-1$ can obtain any value between 0 and -2 by varying θ from 0 to π. We can also make the inverse $\begin{pmatrix}1-\cos\theta\\-\sin\theta\end{pmatrix}$ by inverting the rotations (that is, we do $\mathrm{Rot}(Q,\theta)\circ\mathrm{Rot}(P,-\theta)$). Then $1-\cos\theta$ can obtain any value from 0 to 2.

Now consider an arbitrary translation vector $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. Write a as a sum of values of the form $\cos\theta-1$ and $1-\cos\theta$, this is possible because they obtain all values from -2 to 2. The composition of the corresponding translations $\begin{pmatrix}\cos\theta-1\\\sin\theta\end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix}1-\cos\theta\\-\sin\theta\end{pmatrix}$ is a composition of rotations around P and Q, and it has the same vertical component. To obtain the translation along $\mathbf{v}$, it therefore only remains to add the correct horizontal component. However, by part (b) we can make any horizontal translation vector. We conclude that any translation vector can be obtained from rotations around P and Q.

Question 4

(a) The definition is on pages 66 and 67 of the book. It reads as follows:

Denote the union of V and W as Σ. An affine linear combination of points in Σ is any point of the form

$$P_0+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\overrightarrow{P_1P_i},$$

where $P_0,P_1,\ldots,P_k$ denote points in Σ and $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ are real numbers. The notation $\overrightarrow{P_1P_i}$ denotes the vector pointing from P_1 to P_i.

The affine span $\langle V,W\rangle=\langle\Sigma\rangle$ is the set of all linear combinations of points in Σ.

(NB: It is also the smallest affine linear subspace of $\mathbb{R}^n$ that contains both V and W.)

(b) We first compute that intersection. For a point (x,y,z) in the intersection we will try to express all coordinates in z. First we must have that $2z-y=1$, so $y=2z-1$. Furthermore, we have $5x-2y+3z=2$ and plugging in $y=2z-1$ gives $5x-2(2z-1)+3z=2$.

Expanding gives $5x - z + 2 = 2$, or $x = \frac{1}{5}z$. So any point in the intersection can be written as $(\frac{1}{5}z, 2z - 1, z)$ for some $z \in \mathbb{R}$.

On the other hand, any point given by $(\frac{1}{5}z, 2z - 1, z)$ with $z \in \mathbb{R}$, indeed satisfies the equations of Π_1 and Π_2, because

$$\begin{aligned} 5(\tfrac{1}{5}z) - 2(2z-1) + 3(z) = z - 4z + 2 + 3z = 2, \\ 2z - (2z-1) = 1. \end{aligned}$$

We conclude that all points in the intersection are given by $\{(\frac{1}{5}z, 2z-1, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. This is the parametrisation for a line, so it has dimension 1.

We will prove that the affine span is the entire space $\mathbb{R}^3$, and we do this by writing every point of $\mathbb{R}^3$ as an affine linear combination of points in Π_1 and Π_2. First note that the points $P_0 = (0, -1, 0)$, $P_1 = (1, 9, 5)$ are in the intersection of Π_1 and Π_2, the point $P_2 = (1, 0, -1)$ is in Π_1 and the point $P_3 = (0, 1, 1)$ is in Π_2. Now we look at the vectors $\overrightarrow{P_0P_1} = (1, 10, 5)$, $\overrightarrow{P_0P_2} = (1, 1, -1)$, $\overrightarrow{P_0P_3} = (0, 2, 1)$. They are linearly independent, for example because the determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

is 3. This means that $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}$ span $\mathbb{R}^3$ and therefore the affine linear combinations

$$P_0 + \lambda_1 \overrightarrow{P_0P_1} + \lambda_2 \overrightarrow{P_0P_2} + \lambda_3 \overrightarrow{P_0P_3}$$

with $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ reach all of $\mathbb{R}^3$.

We can now conclude that

$$\dim(\Pi_1 \cap \Pi_2) = 1 = 2 + 2 - 3 = \dim(\Pi_1) + \dim(\Pi_2) - \dim\langle \Pi_1, \Pi_2 \rangle.$$

There is another way to prove that the affine span is equal to $\mathbb{R}^3$. We know that $\langle \Pi_1, \Pi_2 \rangle$ is an affine linear subspace of $\mathbb{R}^3$. It contains the 2-dimensional Π_1, so its dimension is at least 2. If the dimension is 2, it must be equal to Π_1 but this is impossible since Π_2 is also contained in the affine span and it is not contained in Π_1 (the intersection of Π_1 and Π_2 is only a line). Hence the affine span must have dimension at least 3. But it is also contained in the 3-dimensional space $\mathbb{R}^3$, so it must be equal to $\mathbb{R}^3$.

Opgave 1

Zij a de hoek bij A, dan geeft de cosinusregel voor bolmeetkunde dat $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$. Omdat de zijdelengtes gelijk zijn, krijgen we $\cos\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos a$, en omdat $0 < \alpha < \pi$ kunnen we delen door $\sin\alpha$. Dat geeft

$$\cos a = \frac{\cos\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \left(= \frac{\cos\alpha - \cos^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha + 1} \right).$$

We krijgen dezelfde uitdrukkingen voor $\cos b, \cos c$, dus de cosinussen zijn gelijk. Omdat de hoeken kleiner dan π zijn, concluderen we dat alle hoeken gelijk zijn.

De som van de hoeken is gelijk aan π plus de oppervlakte van de driehoek, dus de hoeken moeten allemaal groter zijn dan $\frac{1}{3}\pi$.

Voor het laatste deel kunnen we ook de formule $\cos a = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha+1} = 1 - \frac{1}{\cos\alpha+1}$ gebruiken. Omdat $0 < \cos\alpha + 1 < 2$ volgt namelijk dat $\cos a < 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, waaruit weer volgt dat $a > \frac{1}{3}\pi$.

Opgave 2

(a) Stel eerst dat we een punt $(t,x,y) \in C_s$ hebben. Dan geldt $s = d_{\mathcal{H}^2}(O,(t,x,y)) = \operatorname{arccosh}(-(1,0,0) \cdot_L (t,x,y)) = \operatorname{arccosh} t$. Omdat $t > 0$, volgt dat $t = \cosh s$. Omdat $(t,x,y) \in \mathcal{H}^2$, vinden we dat $x^2 + y^2 = t^2 - 1 = \cosh^2 s - 1 = \sinh^2 s$. Omdat $s > 0$ zien we ook dat $\sinh s > 0$, dus volgt $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\sinh^2 s} = \sinh s$ zoals gevraagd.

De andere kant op, stel dat $(t,x,t) \in \mathbb{R}^3$ voldoet aan $t = \cosh(s)$ en $\sqrt{x^2+y^2} = \sinh(s)$. Ten eerste zien we dat dat $t^2 - x^2 - y^2 = \cosh^2 s - \sinh^2 s = 1$ en $t = \cosh(s) > 0$, dus $(t,x,y) \in \mathcal{H}^2$. Verder rekenen we uit dat $d_{\mathcal{H}^2}(O,(t,x,y)) = \operatorname{arccosh}((1,0,0) \cdot_L (t,x,y)) = \operatorname{arccosh} t = \operatorname{arccosh}(\cosh s) = |s| = s$, dus (t,x,y) ligt inderdaad op C_s.

(b) Omdat $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh x = \sinh x$, vinden we dat

$$A_s = \int_0^s 2\pi \sinh x \,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^s \sinh x \,\mathrm{d}x = 2\pi(\cosh s - \cosh 0) = 2\pi(\cosh s - 1).$$

We weten dat $\lim_{s\to\infty} 2(\cosh s - 1)e^{-s}$ en $\lim_{s\to\infty} 2(\cosh(s-1) - 1)e^{1-s}$ beide bestaan en gelijk zijn aan 1. Daaruit volgt dus dat

$$\begin{aligned}\lim_{s\to\infty} \frac{A_{s-1}}{A_s} &= \lim_{s\to\infty} \frac{2\pi(\cosh(s-1)-1)}{2\pi(\cosh s - 1)} = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{e} \cdot \frac{2(\cosh(s-1)-1)e^{1-s}}{2(\cosh s - 1)e^s} \\ &= \frac{1}{e} \cdot \frac{\lim_{s\to\infty} 2(\cosh(s-1)-1)e^{1-s}}{\lim_{s\to\infty} 2(\cosh s - 1)e^s} = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

(c) Als we een schijf met straal s bekijken, dan is de oppervlakte van het deel dat op afstand hooguit 1 van de rand ligt gelijk aan $A_s - A_{s-1}$. De verhouding hiervan tot de oppervlakte van de hele schijf is gelijk aan $\frac{A_s - A_{s-1}}{A_s} = 1 - \frac{A_{s-1}}{A_s}$. Uit onderdeel (b) zien we dat dat ongeveer gelijk is aan $1 - \frac{1}{e} \approx 0.63$ voor grote s.

In het geval van het Euclidische vlak kunnen we dezelfde berekening uitvoeren, maar met de formule $A_s = \pi s^2$. We zien dat $1 - \frac{A_{s-1}}{A_s} = 1 - \frac{\pi(s-1)^2}{\pi s^2} = 1 - \frac{(s-1)^2}{s^2}$, wat ongeveer gelijk is aan 0 voor grote s.

Opgave 3

(a) We schrijven dit in coördinaten. Een rotatie over een punt anders dan de oorsprong wordt gegeven door $\mathrm{Rot}(P,\theta) = \mathrm{Trans}(\mathbf{p}) \circ \mathrm{Rot}(0,\theta) \circ \mathrm{Trans}(-\mathbf{p})$, waar $\mathbf{p}$ de positievector van het punt P is (meetkundig zien we dit door P te verplaatsen naar de oorsprong, te draaien en dan weer terug te verplaatsen). Dan geldt

$$\begin{aligned}\mathrm{Rot}(P,\theta)(\mathbf{x}) &= \mathrm{Trans}(\mathbf{p}) \circ \mathrm{Rot}(0,\theta)(\mathbf{x}-\mathbf{p}) \\ &= \mathrm{Trans}(\mathbf{p}) \left[\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}(\mathbf{x}-\mathbf{p})\right] \\ &= \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}(\mathbf{x}-\mathbf{p}) + \mathbf{p} \\ &= \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix}1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta\end{pmatrix}\mathbf{p}.\end{aligned}$$

En voor $\mathrm{Rot}(Q,-\theta)$ geldt

$$\mathrm{Rot}(Q,-\theta)\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix}1-\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta\end{pmatrix}\mathbf{q},$$

waar $\mathbf{q}$ de positievector van Q is. Samenstellen van de twee geeft

$$\begin{aligned}\mathrm{Rot}(P,\theta) \circ \mathrm{Rot}(Q,-\theta)\,\mathbf{x} &= \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\mathbf{x} \\ &+ \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta\end{pmatrix}\mathbf{q} + \begin{pmatrix}1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta\end{pmatrix}\mathbf{p} \\ &= \mathbf{x} + \begin{pmatrix}\cos\theta-1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta-1\end{pmatrix}\mathbf{q} + \begin{pmatrix}1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta\end{pmatrix}\mathbf{p}.\end{aligned}$$

We zien dat in de samenstelling allen een vector by $\mathbf{x}$ wordt opgeteld, het is dus inderdaad een translatie. De translatievector is $\begin{pmatrix}\cos\theta-1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta-1\end{pmatrix}\mathbf{q} + \begin{pmatrix}1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta\end{pmatrix}\mathbf{p}$.

(b) We kiezen coördinaten zodat P de oorsprong is, $Q = (1,0)$. Dan is $\mathbf{p} = 0$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{\mathbf{pq}} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Net als in onderdeel (a) kunnen we de volgende samenstelling uitrekenen:

$$\begin{aligned}\mathrm{Rot}(Q,-\theta) \circ \mathrm{Rot}(P,\theta)\,\mathbf{x} &= \mathrm{Rot}(Q,-\theta)\left[\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\mathbf{x}\right] \\ &= \mathrm{Trans}(\mathbf{q}) \circ \mathrm{Rot}(0,-\theta)\left[\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\mathbf{x} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right] \\ &= \mathrm{Trans}(\mathbf{q})\left[\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\mathbf{x} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\right] \\ &= \mathrm{Trans}(\mathbf{q})\left[\mathbf{x} - \begin{pmatrix}\cos\theta \\ -\sin\theta\end{pmatrix}\right] = \mathbf{x} + \begin{pmatrix}1-\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Als we nu $\mathrm{Rot}(Q,\theta) \circ \mathrm{Rot}(P,-\theta) \circ \mathrm{Rot}(Q,-\theta) \circ \mathrm{Rot}(P,\theta)$ uitrekenen, vinden we dat

$$\mathrm{Rot}(Q,\theta) \circ \mathrm{Rot}(P,-\theta) \circ \mathrm{Rot}(Q,-\theta) \circ \mathrm{Rot}(P,\theta)\,\mathbf{x} = \mathbf{x} + 2(1-\cos\theta)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Deze samenstelling van rotaties om P en Q is dus een translatie over een vector in dezelfde richting als $\overrightarrow{\mathbf{pq}}$.

Als we nu θ variëren van 0 tot π, varieert de translatievector van 0 tot $2\overrightarrow{\mathbf{pq}}$. Samenstellen van deze vectoren geeft all translaties $\lambda\overrightarrow{\mathbf{pq}}$ met λ positief. Om negatieve λ's te krijgen, gebruiken we de inverse van de translatie over $2(1-\cos(\theta))\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Die wordt gegeven door

$$\mathrm{Rot}(P,-\theta)\circ\mathrm{Rot}(Q,\theta)\circ\mathrm{Rot}(P,\theta)\circ\mathrm{Rot}(Q,-\theta).$$

(c) We gebruiken nog steeds de coördinaten van onderdeel (b). De translatie in onderdeel (a) is dan een translatie over $\begin{pmatrix}\cos\theta-1\\ \sin\theta\end{pmatrix}$. Merk op dat $\cos\theta-1$ alle waarden tussen 0 en 2 kan aannemen als we θ variëren van 0 tot π. We kunnen ook de inverse translatie over $\begin{pmatrix}1-\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}$ maken door de samenstelling te inverteren (dat wil zeggen, we doen $\mathrm{Rot}(Q,\theta)\circ\mathrm{Rot}(P,-\theta)$). Dan neemt $1-\cos\theta$ alle waarden van 0 tot 2 aan.

Bekijk nu een willekeurige translatievector $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. Schrijf a als een som van getallen van de vorm $\cos\theta-1$ en $1-\cos\theta$, dit is mogelijk omdat ze alle waarden tussen -2 en 2 bereiken. De samenstelling van de bijbehorende translaties over $\begin{pmatrix}\cos\theta-1\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}1-\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}$ is een samenstelling van rotaties om P en Q, en heeft dezelfde verticale component. Om de translatie over $\mathbf{v}$ te krijgen, hoeven we dus alleen nog een translatie over de goede horizontale vector erbij op te tellen. Maar door onderdeel (b) kunnen we alle horizontale translatievectoren maken. We concluderen dat elke translatie een samenstelling is van rotaties om P en Q.

Opgave 4

(a) De definitie staat op pagina's 66 en 67 van het boek, en is als volgt:

Schrijf Σ voor de vereniging van V en W. Een affien lineaire combinatie van punten in Σ is een punt van de vorm

$$P_0+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\overrightarrow{P_1P_i},$$

waar $P_0,P_1,\ldots,P_k$ punten uit Σ zijn en $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ reële getallen. De notatie $\overrightarrow{P_1P_i}$ staat voor de vector van P_1 naar P_i.

Het affien opspansel $\langle V,W\rangle=\langle\Sigma\rangle$ is de verzamelingen van alle lineair affiene combinaties van punten in Σ.

(NB: Het is ook de kleinste affien lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$ die zowel V als W bevat.)

(b) We berekenen eerst de doorsnede. Voor een punt (x,y,z) in de doorsnede proberen we alle coördinaten in x uit te drukken. Ten eerste volgt uit $2z-y=1$ dat $y=2z-1$. Als we dit invullen in $5x-2y+3z=2$ krijgen we $5x-2(2z-1)+3z=2$, oftewel $5x-z+2=2$. Dit geeft $x=\frac{1}{5}z$. Elk punt in de doorsnede kan dus geschreven worden als $(\frac{1}{5}z,2z-1,z)$ voor een $z\in\mathbb{R}$.

De andere kant op, elk punt van de vorm $(\frac{1}{5}z, 2z-1, z)$ with $z \in \mathbb{R}$ voldoet inderdaad aan de vergelijkingen voor Π_1 en Π_2, aangezien

$$\begin{aligned} 5(\tfrac{1}{5}z) - 2(2z-1) + 3(z) = z - 4z + 2 + 3z = 2, \\ 2z - (2z-1) = 1. \end{aligned}$$

We concluderen dat all punten in de doorsnede gegeven worden door $\{(\frac{1}{5}z, 2z-1, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Dit is een parametrisatie van een lijn, dus het heeft dimensie 1.

We bewijzen dat het affiene opspansel gelijk is aan $\mathbb{R}^3$, en we doen dit door elk punt van $\mathbb{R}^3$ als affien lineaire combinatie te schrijven van punten in Π_1 en Π_2. Merkt ten eerste op dat de punten $P_0 = (0, -1, 0)$, $P_1 = (1, 9, 5)$ in de doorsnede van Π_1 en Π_2 liggen, het punt $P_2 = (1, 0, -1)$ ligt in Π_1 en het punt $P_3 = (0, 1, 1)$ ligt in Π_2. Bekijk nu de vectoren $\overrightarrow{P_0P_1} = (1, 10, 5)$, $\overrightarrow{P_0P_2} = (1, 1, -1)$, $\overrightarrow{P_0P_3} = (0, 2, 1)$. Deze zijn lineair onafhankelijk, bijvoorbeeld omdat de determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

gelijk is aan 3. Dit betekent dat $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}$ de hele ruimte $\mathbb{R}^3$ opspannen, en daarom bereieken de affien lineaire combinaties

$$P_0 + \lambda_1 \overrightarrow{P_0P_1} + \lambda_2 \overrightarrow{P_0P_2} + \lambda_3 \overrightarrow{P_0P_3}$$

met $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ de hele ruimte $\mathbb{R}^3$.

We kunnen nu concluderen dat

$$\dim(\Pi_1 \cap \Pi_2) = 1 = 2 + 2 - 3 = \dim(\Pi_1) + \dim(\Pi_2) - \dim\langle \Pi_1, \Pi_2 \rangle.$$

Er is een andere manier om te laten zien dat het affiene opspanel gelijk is aan $\mathbb{R}^3$. We weten dat $\langle \Pi_1, \Pi_2 \rangle$ een affien lineaire deelruimte is van $\mathbb{R}^3$. Het bevat ook het 2-dimensionale Π_1, dus de dimensie is minstens 2. Als de dimensie 2 is, moet het gelijk zijn aan Π_1. Dat is echter onmogelijk, omdat Π_2 ook in het opspansel zit maar niet in Π_1 (de doorsnede van Π_1 en Π_2 is slechts een lijn). Het affiene opspansel moet dus minstens dimensie 3 hebben. Het zit ook in de 3-dimensionale ruimte $\mathbb{R}^3$, dus het is gelijk aan $\mathbb{R}^3$.