Introduction to Geometry: final exam

April 11th, 2018

- Use a separate sheet for each exercise!
- Distribution of points: **Q1: 3** (1+1+1), **Q2: 3** (0.75 + 0.75 + 0.75 + 0.75), **Q3: 3** (1 + 1 + 1), **Q4: 1**. This distribution does not necessarily represent how difficult a problem is.
- Write your name and student number clearly on ever piece of paper.
- Books, notes, computers, tablets, mobile phones or any other materials or electronic devices are forbidden.
- Do not just provide answers, but with each (partial) assignment show and reason clearly how you arrive at that step; when you claim something, prove it.
- Even if you cannot prove one part of the assignment, you are allowed to use that result later on.

Question 1

In this exercise, $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

(a) Let A, B, C and D be four distinct points lying on the sphere $\mathbb{S}^2$. We assume that the distances $\alpha = d_{\mathbb{S}^2}(A, B)$, $\beta = d_{\mathbb{S}^2}(B, C)$, $\gamma = d_{\mathbb{S}^2}(C, D)$ and $\delta = d_{\mathbb{S}^2}(D, A)$ are all smaller than π. Suppose that the dihedral angles $\angle ABC$ and $\angle CDA$ are both equal to $\frac{\pi}{2}$. Show that $\cos\alpha\cos\beta = \cos\gamma\cos\delta$.

(b) Prove that the metric spaces $\mathbb{S}^2$ and $\mathbb{E}^2$ (with their usual distance functions) are not isometric. (That is, prove that there does not exist an isometry $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{E}^2$.)

(c) Show that every direct isometry of $\mathbb{E}^2$ can be written as the composition of two rotations.

Question 2

The upper half-plane is the set $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. (Recall that if $z = x + yi$ with $x, y \in \mathbb{R}$ is a complex number, then $\mathrm{Im}(z) = y$.) On this set, we define a distance function by

$$d_{\mathcal{H}}(z_1, z_2) = \operatorname{arccosh}\left(1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2\mathrm{Im}(z_1)\mathrm{Im}(z_2)}\right) \quad \text{for } z_1, z_2 \in \mathcal{H}.$$

This makes $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ into a model of the hyperbolic plane (you do not have to prove this). For $a, b \in \mathbb{R}$ with $a > 0$, we define the function $T_{a,b} \colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ by

$$T_{a,b}(z) = az + b \quad \text{for } z \in \mathcal{H}.$$

(a) Show that $T_{a,b}(z) \in \mathcal{H}$ for all $z \in \mathcal{H}$.

(b) Show that $T_{a,b}$ is distance-preserving with respect to $d_{\mathcal{H}}$.

(c) Show that $T_{a,b}$ is an isometry of $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$.

(d) Let $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$ be given. Find $a, b \in \mathbb{R}$ such that $a > 0$ and $T_{a,b}(z_1) = z_2$.

Question 3

In this problem we consider the vector space $\mathbb{R}^3$ with the Lorentz inner product.

(a) Let $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ be two linearly independent vectors. Assume they are Lorentz orthogonal, and that they are both space-like (recall that a vector $\mathbf{v}$ is called space-like if $q_L(\mathbf{v}) > 0$, where $q_L(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot_L \mathbf{v}$). The linear span of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ is a plane. Prove that all non-zero vectors in this plane are space-like.

(b) Let $\mathbf{p} = (t, x, y)$ give a point on the hyperbolic plane $\mathcal{H}^2$ and assume that $t > 1$. Let V be the set of all vectors Lorentz orthogonal to $\mathbf{p}$. (You may use that V is a 2-dimensional linear subspace of $\mathbb{R}^3$.) Prove that $\mathbf{q} = (\frac{t^2-1}{t}, x, y)$ and $\mathbf{r} = (0, y, -x)$ are Lorentz orthogonal and form a basis of V.

(c) Consider the plane $\Pi = \mathbf{p} + V = \{\mathbf{p} + \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in V\}$. Prove that $q_L(\mathbf{w}) \geq -1$ for all vectors $\mathbf{w} \in \Pi$. Explain that Π and $\mathcal{H}^2$ have exactly one intersection point.

The last part shows that Π is tangent to $\mathcal{H}^2$ in the point (t, x, y). Hence the tangent plane to (t, x, y) is parallel to the Lorentz orthogonal complement of the vector (t, x, y).

Question 4

Let $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2)$ be three points in $\mathbb{A}^2$. Prove that these three points are collinear if and only if

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

- Elke opgave op een apart blaadje.
- Puntenverdeling als volgt: **V1: 3** (1+1+1), **V2: 3** (0.75 + 0.75 + 0.75 + 0.75), **V3: 3** (1 + 1 + 1), **V4: 1**. Let op dat moeilijkheidsgraad niet per definitie gelijk opgaat met de hoeveelheid punten.
- Schrijf duidelijk je naam en studentnummer op elk blaadje.
- Geen hulpmiddelen zoals boeken of elektronische apparaten zoals computers of tablets toegestaan.
- Beargumenteer tussenstappen zoveel mogelijk, zorg ook dat je alles wat je claimt eerst bewijst.
- Als een bepaald bewijs niet lukt in een opgave, dan mag je het resultaat nog steeds later gebruiken in een andere opgave.

Opgave 1

In deze opgave geldt $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

(a) Laat A, B, C en D vier verschillende punten op de bol $\mathbb{S}^2$ zijn. We nemen aan dat de afstanden $\alpha = d_{\mathbb{S}^2}(A, B)$, $\beta = d_{\mathbb{S}^2}(B, C)$, $\gamma = d_{\mathbb{S}^2}(C, D)$ en $\delta = d_{\mathbb{S}^2}(D, A)$ allemaal kleiner dan π zijn. Veronderstel dat de dihedrale hoeken $\angle ABC$ en $\angle CDA$ beide gelijk zijn aan $\frac{\pi}{2}$. Bewijs dat $\cos\alpha\cos\beta = \cos\gamma\cos\delta$.

(b) Bewijs dat de metrische ruimten $\mathbb{S}^2$ en $\mathbb{E}^2$ (met hun gebruikelijke afstandsfuncties) niet isometrisch zijn. (Bewijs dus dat er geen isometrie $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{E}^2$ bestaat.)

(c) Bewijs dat iedere directe isometrie van $\mathbb{E}^2$ geschreven kan worden als de samenstelling van twee rotaties.

Opgave 2

Het bovenste halfvlak is de verzameling $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. (Ter herinnering: als $z = x + yi$ met $x, y \in \mathbb{R}$ een complex getal is, dan is $\mathrm{Im}(z) = y$.) Op deze verzameling definiëren we een afstandsfunctie door

$$d_{\mathcal{H}}(z_1, z_2) = \operatorname{arccosh}\left(1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2\mathrm{Im}(z_1)\mathrm{Im}(z_2)}\right) \quad \text{voor } z_1, z_2 \in \mathcal{H}.$$

Nu is $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ een model van het hyperbolische vlak (dit hoef je niet te bewijzen). Voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $a > 0$ definiëren we de functie $T_{a,b}\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ door

$$T_{a,b}(z) = az + b \quad \text{voor } z \in \mathcal{H}.$$

(a) Bewijs dat $T_{a,b}(z) \in \mathcal{H}$ voor alle $z \in \mathcal{H}$.

(b) Bewijs dat $T_{a,b}$ afstandbehoudend is ten opzichte van $d_{\mathcal{H}}$.

(c) Bewijs dat $T_{a,b}$ een isometrie van $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ is.

(d) Laat $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$ gegeven zijn. Vind $a, b \in \mathbb{R}$ zodanig dat $a > 0$ en $T_{a,b}(z_1) = z_2$.

Opgave 3

In deze opgave bekijken we de vectorruimte $\mathbb{R}^3$ met het Lorentz-inproduct.

(a) Gegeven zijn twee linear onafhankelijke vectoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Neem aan dat ze Lorentz-orthogonaal zijn, en dat beide ruimteachtig ('space-like') zijn (een vector $\mathbf{v}$ heet *space-like* indien $q_L(\mathbf{v}) > 0$, waarbij $q_L(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot_L \mathbf{v}$). Het linear opspansel van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ is een vlak. Bewijs dat alle niet-nul vectoren in dit vlak ruimteachtig zijn.

(b) De vector $\mathbf{p} = (t, x, y)$ geeft een punt op het hyperbolische vlak $\mathcal{H}^2$. Neem aan dat $t > 1$. Zij V de verzameling van alle vectoren die Lorentz-orthogonaal zijn met $\mathbf{p}$. (Je mag gebruiken dat V een 2-dimensionale lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^3$ is.) Bewijs dat $\mathbf{q} = (\frac{t^2-1}{t}, x, y)$ en $\mathbf{r} = (0, y, -x)$ Lorentz-orthogonaal zijn en een basis van V vormen.

(c) Bekijk het vlak $\Pi = \mathbf{p} + V = \{\mathbf{p} + \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in V\}$. Bewijs dat $q_L(\mathbf{w}) \geq -1$ voor alle vectoren $\mathbf{w} \in \Pi$. Leg uit dat Π en $\mathcal{H}^2$ precies één snijpunt hebben.

Het laatste onderdeel laat zien dat Π en $\mathcal{H}^2$ elkaar raken in het punt (t, x, y). Het raakvlak in (t, x, y) is dus parallel aan het Lorentz-orthogonaal complement van de vector (t, x, y).

Opgave 4

Bekijk de punten $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2)$ in $\mathbb{A}^2$. Bewijs dat deze drie punten op één lijn liggen dan en slechts dan als

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Solution 1

(a) Write $\epsilon = d_{\mathbb{S}^2}(A, C)$. Since $\cos\angle ABC = 0$, the main formula of spherical trigonometry applied to $\triangle ABC$ tells us that

$$\cos\epsilon = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\angle ABC = \cos\alpha\cos\beta.$$

Analogously, by applying the main formula to $\triangle CDA$, we find $\cos\epsilon = \cos\gamma\cos\delta$, which yields the desired conclusion.

(b) An isometry $\mathbb{E}^2 \to \mathbb{S}^2$ cannot exist as distances larger than π cannot be preserved (on $\mathbb{S}^2$, the largest possible distance is the distance between two antipodal points, which equals π.)

(c) A direct isometry of $\mathbb{E}^2$ is either a rotation or a translation. A rotation $\mathrm{Rot}(O, \theta)$ can be written as $\mathrm{Rot}(O, \frac{1}{2}\theta) \circ \mathrm{Rot}(O, \frac{1}{2}\theta)$. Now suppose we have a translation $\mathrm{Trans}(\mathbf{v})$. Pick two points $P, Q \in \mathbb{E}^2$ such that $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\mathbf{v}$. Then $\mathrm{Trans}(\mathbf{v}) = \mathrm{Rot}(Q, \pi) \circ \mathrm{Rot}(P, \pi)$ (this can be shown either geometrically or in coordinates). Alternatively, we can use that every direct isometry T can be written as the composition of two reflections $T = S_\ell \circ S_{\ell'}$. If m denotes any line not parallel to ℓ or ℓ', then $T = S_\ell \circ S_m \circ S_m \circ S_{\ell'}$, where $S_\ell \circ S_m$ and $S_m \circ S_{\ell'}$ are both rotations.

Solution 2

(a) Write $z = x + yi$ with $x, y \in \mathbb{R}$ and $y > 0$. Then $T_{a,b}(z) = az + b = a(x + yi) + b = (ax + b) + (ay)i$. Since a and y are both positive, ay must be positive as well. So $\mathrm{Im}(T_{a,b}(z)) = ay > 0$, which means that $T_{a,b}(z) \in \mathcal{H}$.

(b) Consider two numbers $z_1 = x_1 + y_1 i$ and $z_2 = x_2 + y_2 i$ in the upper half-plane. Then as above, we see that $\mathrm{Im}(T_{a,b}(z_1)) = ay_1$ and $\mathrm{Im}(T_{a,b}(z_2)) = ay_2$, so

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{H}}(T_{a,b}(z_1), T_{a,b}(z_2)) &= \operatorname{arccosh}\left(1 + \frac{|(az_1 + b) - (az_2 + b)|^2}{2(ay_1)(ay_2)}\right) \\ &= \operatorname{arccosh}\left(1 + \frac{|a(z_1 - z_2)|^2}{2a^2 \cdot y_1 y_2}\right) \\ &= \operatorname{arccosh}\left(1 + \frac{a^2 \cdot |z_1 - z_2|^2}{2a^2 \cdot y_1 y_2}\right) \\ &= \operatorname{arccosh}\left(1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2y_1 y_2}\right) = d_{\mathcal{H}}(z_1, z_2), \end{aligned}$$

as desired.

(c) We have

$$\begin{aligned} T_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}}(T_{a,b}(z)) &= \tfrac{1}{a}(az + b) - \tfrac{b}{a} = z + \tfrac{b}{a} - \tfrac{b}{a} = z \quad \text{and} \\ T_{a,b}\left(T_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}}(z)\right) &= a\left(\tfrac{z}{a} - \tfrac{b}{a}\right) + b = z - b + b = z, \end{aligned}$$

as we needed to show. Now we know that $T_{a,b}$ preserves distance and is a bijection (since it has $T_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}}$ as an inverse), so $T_{a,b}$ is an isometry.

(d) Again, we write $z_1 = x_1 + y_1 i$ and $z_2 = x_2 + y_2 i$ with $y_1, y_2 > 0$. The required numbers are $a = \frac{y_2}{y_1} > 0$ and $b = x_2 - \frac{x_1 y_2}{y_1}$. Indeed, we have

$$T_{a,b}(z_1) = \tfrac{y_2}{y_1} \cdot (x_1 + y_1 i) + x_2 - \tfrac{x_1 y_2}{y_1} = \left(\tfrac{x_1 y_2}{y_1} + x_2 - \tfrac{x_1 y_2}{y_1}\right) + y_2 i = x_2 + y_2 i = z_2.$$

Solution 3

(a) Using the bilinearity and symmetry of the Lorent inner product, and the fact that $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ are Lorentz-orthogonal, we calculate for $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} q_L(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) &= \alpha\mathbf{a} \cdot_L \alpha\mathbf{a} + 2(\alpha\mathbf{a} \cdot_L \beta\mathbf{b}) + \beta\mathbf{b} \cdot_L \beta\mathbf{b} \\ &= \alpha^2 q_L(\mathbf{a}) + \beta^2 q_L(\mathbf{b}). \end{aligned}$$

Because $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ are space-like, their Lorentz norms are positive. And because squares are non-negative, we see that $q_L(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) \geq 0$. Equality occurs iff $\alpha = \beta = 0$. Hence all non-zero vectors in the plane have positive Lorentz norm and thus are space-like.

(b) We first show that $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ are mutually Lorentz orthogonal. It is clear that $\mathbf{p} \cdot_L \mathbf{r} = 0$ and $\mathbf{q} \cdot_L \mathbf{r} = 0$. Further, we see that

$$\mathbf{p} \cdot_L \mathbf{q} = -(t^2 - 1) + x^2 + y^2 = 1 - t^2 + x^2 + y^2 = 0.$$

So $\mathbf{q}$ and $\mathbf{r}$ indeed lie in V, and are orthogonal. To show that they form a basis, we only need that they are linearly independent. Because $t > 1$, we know that x, y cannot be both zero. So $\mathbf{q}, \mathbf{r}$ are both non-zero, and because the first coordinate of $\mathbf{q}$ is non-zero, they are linearly independent.

(c) We first show that $\mathbf{q}$ and $\mathbf{r}$ are space-like. We see that $q_L(\mathbf{r}) = x^2 + y^2 > 0$, and

$$q_L(\mathbf{p}) = \frac{-(t^2-1)^2}{t^2} + x^2 + y^2 = t^2 - 1 - \frac{(t^2-1)^2}{t^2} > t^2 - 1 - \frac{(t^2-1)^2}{t^2 - 1} = 0.$$

Because they are also Lorentz orthogonal, part (a) shows that all non-zero vectors in V are space-like. Because $\mathbf{p}$ is Lorentz orthogonal to any vector $\mathbf{v} \in V$, we see that

$$q_L(\mathbf{p} + \mathbf{v}) = q_L(\mathbf{p}) + q_L(\mathbf{v}) = -1 + q_L(\mathbf{v}) \geq -1.$$

Equality holds only if $q_L(\mathbf{v}) = 0$. Because all non-zero vectors in V are space-like, this means that $\mathbf{v} = 0$, so equality holds only for $\mathbf{p}$. So Π and $\mathcal{H}^2$ only intersect in the point (t, x, y).

Solution 4

Points $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ are collinear if and only if they are contained in a line $L_{\alpha,\beta,\gamma} = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 : \alpha x + \beta y + \gamma = 0\}$ for some α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$, not all zero. Now let M denote the matrix in the question. We have

$$\begin{aligned}
\det M = 0 &\iff \text{the rows of } M \text{ are linearly dependent;} \\
&\iff \text{for some } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \text{ not all } 0, \text{ we have} \\
&\qquad \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \\
&\iff \text{for some } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \text{ not all } 0, \ L_{\alpha,\beta,\gamma} \text{ contains } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ and } \mathbf{c}; \\
&\iff \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ and } \mathbf{c} \text{ are collinear.}
\end{aligned}$$

Uitwerking 1

(a) Schrijf $\epsilon = d_{\mathbb{S}^2}(A, C)$. Aangezien $\cos\angle ABC = 0$ vinden we door de cosinusregel voor een boloppervlak toe te passen op $\triangle ABC$ dat

$$\cos\epsilon = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\angle ABC = \cos\alpha\cos\beta.$$

Analoog geeft toepassen op $\triangle CDA$ dat $\cos\epsilon = \cos\gamma\cos\delta$, waaruit de gevraagde conclusie volgt.

(b) Een isometrie van $\mathbb{E}^2$ naar $\mathbb{S}^2$ is niet mogelijk omdat afstanden groter dan π niet behouden kunnen blijven (op een bol met straal 1 zijn alle afstanden hoogstens π).

(c) Een directe isometrie van $\mathbb{E}^2$ is een rotatie of een translatie. Een rotatie $\mathrm{Rot}(O, \theta)$ kan bijvoorbeeld geschreven worden als $\mathrm{Rot}(O, \frac{1}{2}\theta) \circ \mathrm{Rot}(O, \frac{1}{2}\theta)$. Bekijk nu een translatie $\mathrm{Trans}(\mathbf{v})$. Kies punten $P, Q \in \mathbb{E}^2$ zodat $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\mathbf{v}$. Dan geldt $\mathrm{Trans}(\mathbf{v}) = \mathrm{Rot}(Q, \pi) \circ \mathrm{Rot}(P, \pi)$ (dit kan meetkundig of m.b.v. coördinaten bewezen worden). Alternatief: elke directe isometrie T kan geschreven worden als de samenstelling van twee spiegelingen $T = S_\ell \circ S_{\ell'}$. Als m een willekeurige lijn is niet evenwijdig aan ℓ of ℓ', dan geldt $T = S_\ell \circ S_m \circ S_m \circ S_{\ell'}$, waarbij $S_\ell \circ S_m$ en $S_m \circ S_{\ell'}$ beide rotaties zijn.

Uitwerking 2

(a) Schrijf $z = x + yi$ met $x, y \in \mathbb{R}$ en $y > 0$. Dan is $T_{a,b}(z) = az + b = a(x + yi) + b = (ax + b) + (ay)i$. Aangezien a en y beide positief zijn is ay eveneens positief. Dus $\mathrm{Im}(T_{a,b}(z)) = ay > 0$, wat betekent dat $T_{a,b}(z) \in \mathcal{H}$.

(b) Bekijk $z_1 = x_1 + y_1 i$ en $z_2 = x_2 + y_2 i$ in het bovenste halfvlak. Zoals hierboven zien we dat $\mathrm{Im}(T_{a,b}(z_1)) = ay_1$ en $\mathrm{Im}(T_{a,b}(z_2)) = ay_2$, dus

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{H}}(T_{a,b}(z_1), T_{a,b}(z_2)) &= \operatorname{arccosh}\left(1 + \frac{|(az_1 + b) - (az_2 + b)|^2}{2(ay_1)(ay_2)}\right) \\ &= \operatorname{arccosh}\left(1 + \frac{|a(z_1 - z_2)|^2}{2a^2 \cdot y_1 y_2}\right) \\ &= \operatorname{arccosh}\left(1 + \frac{a^2 \cdot |z_1 - z_2|^2}{2a^2 \cdot y_1 y_2}\right) \\ &= \operatorname{arccosh}\left(1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2y_1 y_2}\right) = d_{\mathcal{H}}(z_1, z_2), \end{aligned}$$

zoals gevraagd.

(c) Er geldt

$$\begin{aligned} T_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}}(T_{a,b}(z)) &= \tfrac{1}{a}(az + b) - \tfrac{b}{a} = z + \tfrac{b}{a} - \tfrac{b}{a} = z \quad \text{en} \\ T_{a,b}\left(T_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}}(z)\right) &= a\left(\tfrac{z}{a} - \tfrac{b}{a}\right) + b = z - b + b = z, \end{aligned}$$

zoals gewenst. We weten nu dat $T_{a,b}$ afstanden bewaart en bijectief is (aangezien $T_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}}$ een inverse is), dus $T_{a,b}$ is een isometrie.

(d) Schrijf opnieuw $z_1 = x_1 + y_1 i$ en $z_2 = x_2 + y_2 i$ met $y_1, y_2 > 0$. Dan voldoen $a = \frac{y_2}{y_1} > 0$ en $b = x_2 - \frac{x_1 y_2}{y_1}$. Dit zien we met de volgende berekening:

$$T_{a,b}(z_1) = \tfrac{y_2}{y_1} \cdot (x_1 + y_1 i) + x_2 - \tfrac{x_1 y_2}{y_1} = \left(\tfrac{x_1 y_2}{y_1} + x_2 - \tfrac{x_1 y_2}{y_1}\right) + y_2 i = x_2 + y_2 i = z_2.$$

Uitwerking 3

(a) Door de bilineariteit en symmetrie van het Lorentz-inproduct te gebruiken, en bovendien te gebruiken dat $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ Lorentz-orthogonaal zijn, vinden we dat voor $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$\begin{aligned} q_L(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) &= \alpha\mathbf{a} \cdot_L \alpha\mathbf{a} + 2(\alpha\mathbf{a} \cdot_L \beta\mathbf{b}) + \beta\mathbf{b} \cdot_L \beta\mathbf{b} \\ &= \alpha^2 q_L(\mathbf{a}) + \beta^2 q_L(\mathbf{b}). \end{aligned}$$

Aangezien $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ 'space-like' zijn, zijn hun Lorentz-normen positief. Aangezien kwadraten niet-negatief zijn, zien we dat $q_L(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) \geq 0$. Gelijkheid geldt dan en slechts dan als $\alpha = \beta = 0$. Dus alle niet-triviale vectoren in het vlak hebben positieve Lorentz-norm, hetgeen betekent dat ze 'space-like' zijn.

(b) We tonen eerst aan dat $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ paarsgewijs Lorentz-orthogonaal zijn. Het is duidelijk dat $\mathbf{p} \cdot_L \mathbf{r} = 0$ en $\mathbf{q} \cdot_L \mathbf{r} = 0$. Bovendien is

$$\mathbf{p} \cdot_L \mathbf{q} = -(t^2 - 1) + x^2 + y^2 = 1 - t^2 + x^2 + y^2 = 0.$$

Dus $\mathbf{q}$ en $\mathbf{r}$ liggen inderdaad in V, en ze zijn orthogonaal. Om te laten zien dat ze een basis vormen moeten we nog bewijzen dat ze lineair onafhankelijk zijn. Omdat $t > 1$, weten we dat x en y niet allebei 0 kunnen zijn. Dus $\mathbf{q}, \mathbf{r}$ zijn beide niet-nul, en aangezien de eerste coördinaat van $\mathbf{q}$ niet 0 is, zijn ze lineair onafhankelijk.

(c) We laten eerst zien dat $\mathbf{q}$ en $\mathbf{r}$ 'space-like' zijn. We zien dat $q_L(\mathbf{r}) = x^2 + y^2 > 0$, en

$$q_L(\mathbf{p}) = \frac{-(t^2-1)^2}{t^2} + x^2 + y^2 = t^2 - 1 - \frac{(t^2-1)^2}{t^2} > t^2 - 1 - \frac{(t^2-1)^2}{t^2-1} = 0.$$

Omdat ze ook Lorentz-orthogonaal zijn, volgt uit onderdeel (a) dat alle niet-nul vectoren in V 'space-like' zijn. Aangezien $\mathbf{p}$ Lorentz-orthogonaal is met elke vector $\mathbf{v} \in V$, zien we dat

$$q_L(\mathbf{p} + \mathbf{v}) = q_L(\mathbf{p}) + q_L(\mathbf{v}) = -1 + q_L(\mathbf{v}) \geq -1.$$

Er geldt alleen gelijkheid als $q_L(\mathbf{v}) = 0$. Aangezien alle niet-nul vectoren in V 'space-like' zijn, betekent dit dat $\mathbf{v} = 0$, dus gelijkheid geldt enkel voor $\mathbf{p}$. Dus Π en $\mathcal{H}^2$ snijden alleen in (t, x, y).

Uitwerking 4

De punten **a**, **b**, **c** liggen op één lijn als ze bevat zijn in een lijn $L_{\alpha,\beta,\gamma} = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 : \alpha x + \beta y + \gamma = 0\}$ voor zekere α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$, niet allemaal 0. Zij M de matrix in de opgave. Er geldt

$$\begin{aligned}
\det M = 0 &\iff \text{de rijen van } M \text{ zijn lineair afhankelijk;} \\
&\iff \text{er bestaan } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \text{ niet allemaal 0, zodat} \\
&\qquad\qquad \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \\
&\iff \text{er bestaan } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \text{ niet allemaal 0, zodat } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{c} \text{ bevat zijn in } L_{\alpha,\beta,\gamma}; \\
&\iff \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{c} \text{ zijn collineair.}
\end{aligned}$$