EINDTENTAMEN ZWARTE GATEN

① Vraagjes

a) Er is nog steeds behoud van energie. In de situatie van de roodverschuiving is er sprake van twee waarnemers. Elk van die waarnemers heeft een eigen klok, en een eigen notie van energie. Beide waarnemers meten behoud van energie, ook al is $E' < E$ na de roodverschuiving. De fout in de redenering is dus dat energiebehoud ~~??~~ niet hoeft te gelden tussen twee waarnemers onderling, maar wel voor elke waarnemer afzonderlijk.

b) De temperatuur aan de binnenkant is hoger omdat de snelheid van de deeltjes aan de binnenkant groter is. Dit laatste is waar omdat deeltjes op een cirkel met straal R een snelheid hebben $v = \sqrt{\frac{G_N M}{R}}$, dus kleinere straal R betekent grotere snelheid v. Verder wordt de temperatuur veroorzaakt door wrijving tussen de deeltjes op aanliggende stralen R, en de wrijving is evenredig met de snelheid. Daarom stijgt de temperatuur dus naar de binnenkant van de accretieschijf

c) De Roche limiet wordt bereikt wanneer de getijdekrachten op een lichaam even groot worden als de (zwaarte-) kracht die het lichaam samenhoudt.

Als de getijdekracht groter wordt, "vloeit" er materie van het ene lichaam (vb ster) naar het andere (vb. zwart gat). In formules, de getijdekracht wordt gegeven door, (zie figuur formularium)

$$\Delta F = 2 G_N \frac{m M}{r^3} \Delta r \qquad (*)$$

Dit volgt uit de zwaartekrachtswet

$$F(r) = - G_N \frac{M m}{r^2}$$

en de Taylor-ontwikkeling

$$F(r) = F(r_0) + (r - r_0) \frac{dF}{dr}(r = r_0) + \dots$$

$$\Rightarrow |\Delta F| = + 2 G_N \frac{M m}{r_0^3} R \qquad \text{met } r_0 = r + R$$

met $R \Rightarrow \Delta r$ en $r_0 \Rightarrow r$ in de tekening

De zwaartekracht die de twee massa's samenhoudt anderzyds, is gegeven door

$$|F| = G_N \frac{m^2}{(\Delta r)^2} \qquad (**)$$

in de notatie van de figuur

De Roche limiet zegt

$$(*) = (**) \qquad \text{voor} \quad r = r_{Roche}$$

dus

$$2 G_N \frac{m M}{r^3_{Roche}} \Delta r = G_N \frac{m^2}{(\Delta r)^2}$$

Hieruit volgt

$$r^3_{Roche} = \left(\frac{2M}{m}\right) (\Delta r)^3$$

$$\Rightarrow \qquad r_{Roche} = \left(\frac{2M}{m}\right)^{1/3} \Delta r$$

$\boxtimes$

2. Speelgoed Horizon

a) Uit $ds^2 = 0$ volgt

$$x\, dv^2 = 2\, dv\, dx$$

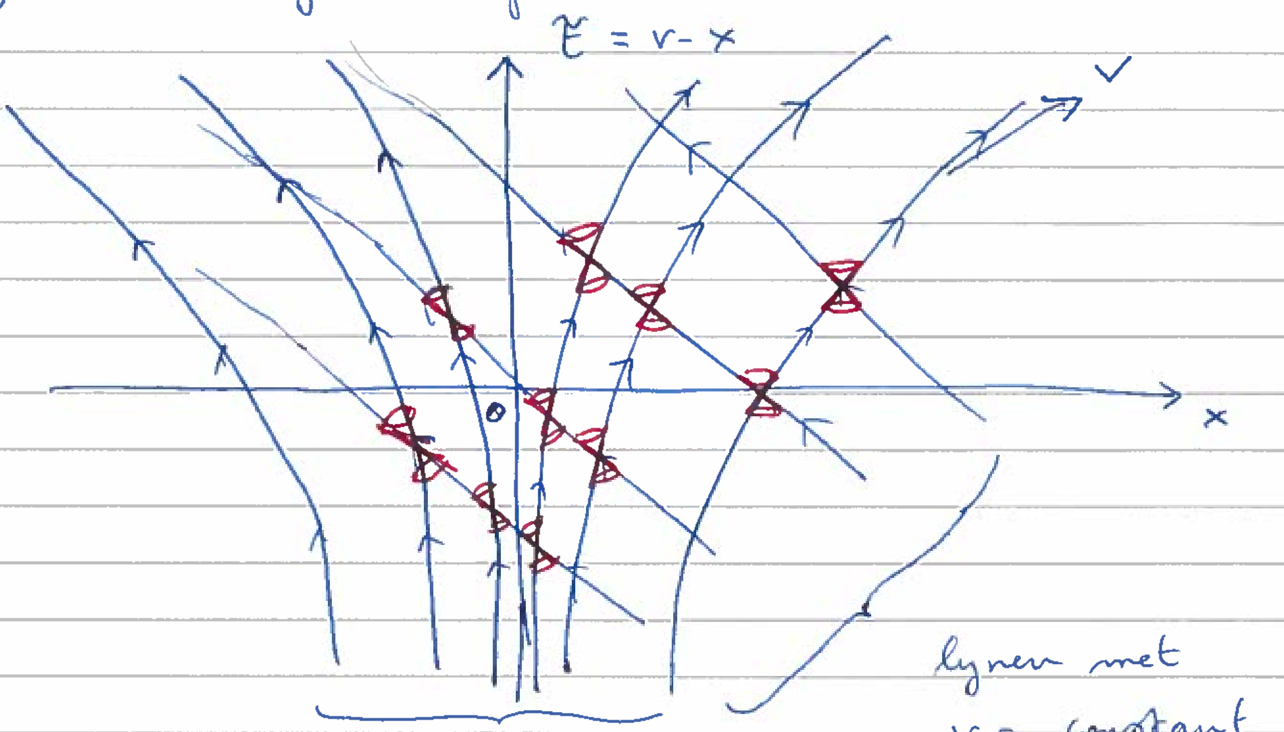
Twee mogelijkheden : $dv = 0$ en

$$dv = 2 \frac{dx}{x}$$

Oplossingen zijn $v =$ constante en

$$\begin{cases} v = 2 \ln x + \text{constante} & \text{voor } x > 0 \\ v = 2 \ln(-x) + \text{constante} & \text{voor } x < 0 \end{cases}$$

b) Ruimtetijd diagram



lijnen met $v =$ constant (ingaand)

$$\tilde{t} = v - x = 2 \ln|x| - x + \text{const.}$$

c) De wereldlijnen van deeltjes moeten altijd in de "future lightcones" liggen.
Een ingaande lichtstraal vb kan van $x > 0$ naar $x < 0$ gaan, zoals volgt uit de figuur. Eveneens voor deeltjes met massa. Maar omdat de lichtkegels voor $x < 0$ steeds gericht zijn naar $x < 0$ is ~~het~~ $x = 0$ een horizon, en kan een ingaand deeltje vertrekkend uit $x > 0$ naar $x < 0$, nooit meer terug naar $x > 0$.

3 Een zwart gat metriek

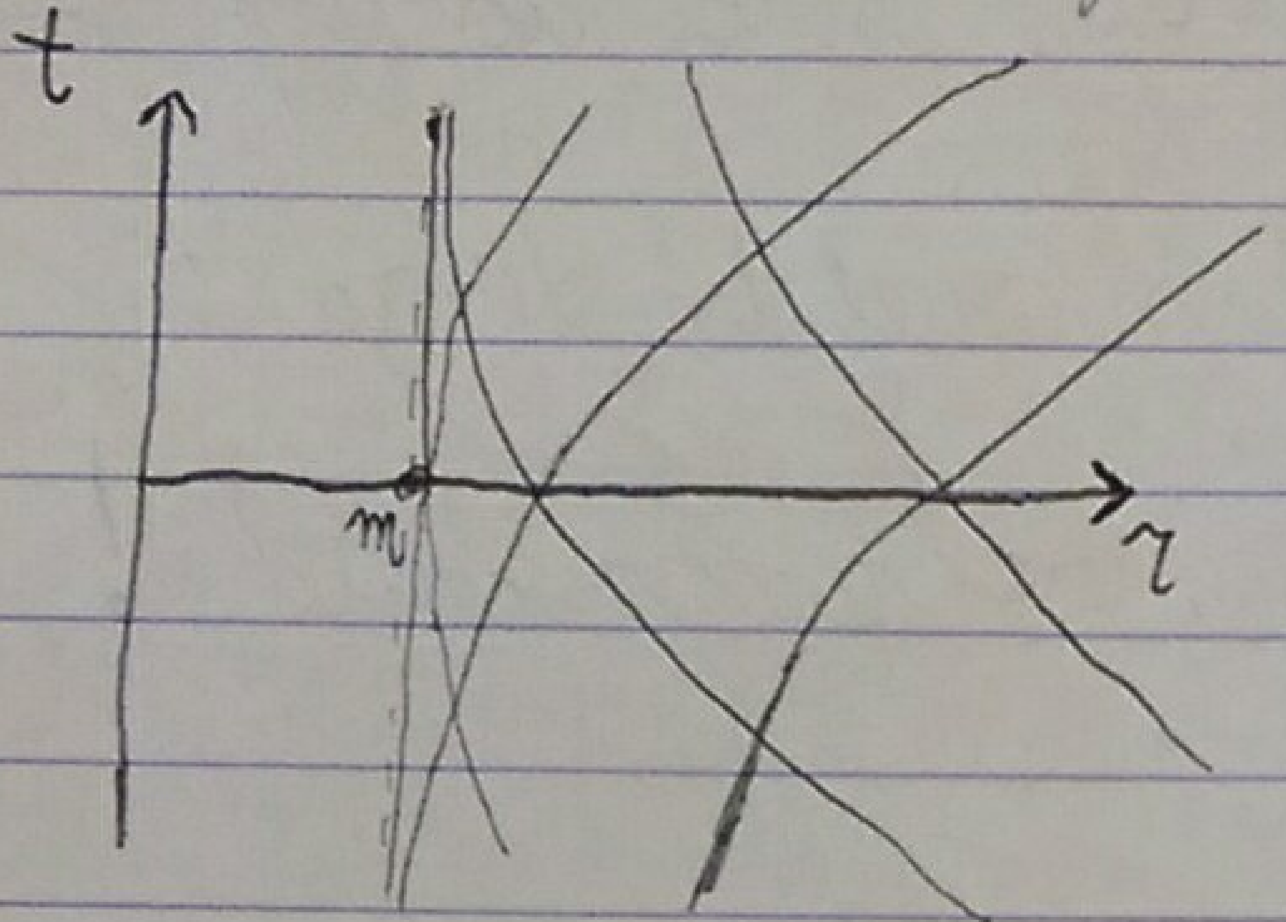
a) • Voor lichtstralen is $ds^2 = 0$, dus met $d\Omega^2 = 0$ (radieel) geeft dit

2 $\left(1-\frac{m}{r}\right)^2 dt^2 = \frac{dr^2}{\left(1-\frac{m}{r}\right)^2}$, dus $\frac{dr}{dt} = \pm\left(1-\frac{m}{r}\right)^2$

1 • $\pm$ betekent radieel ingaande $(-)$ of uitgaande $(+)$ lichtstralen

•

2



• $\frac{dt}{dr} \to \pm\infty$ als $r \to m$

• $t \simeq \pm r$ als $r \to \infty$

b) • Uit (0.5) volgt $\frac{dt}{dr} = \frac{\pm 1}{\left(1-\frac{m}{r}\right)^2}$ en uit (0.6) $\frac{dt}{dr} = \pm\frac{dr_*}{dr}$, dus

2 we moeten aantonen dat $\frac{dr_*}{dr} = \frac{1}{\left(1-\frac{m}{r}\right)^2}$.

• Berekenen geeft $\frac{dr_*}{dr} = 1 + \frac{m^2}{(r-m)^2} + \frac{2m}{r-m} = \left(1 + \frac{m}{r-m}\right)^2$

3 $$= \left(\frac{r-m+m}{r-m}\right)^2 = \frac{1}{\left(1-\frac{m}{r}\right)^2}$$, dus (0.6)

is inderdaad een oplossing van (0.5).

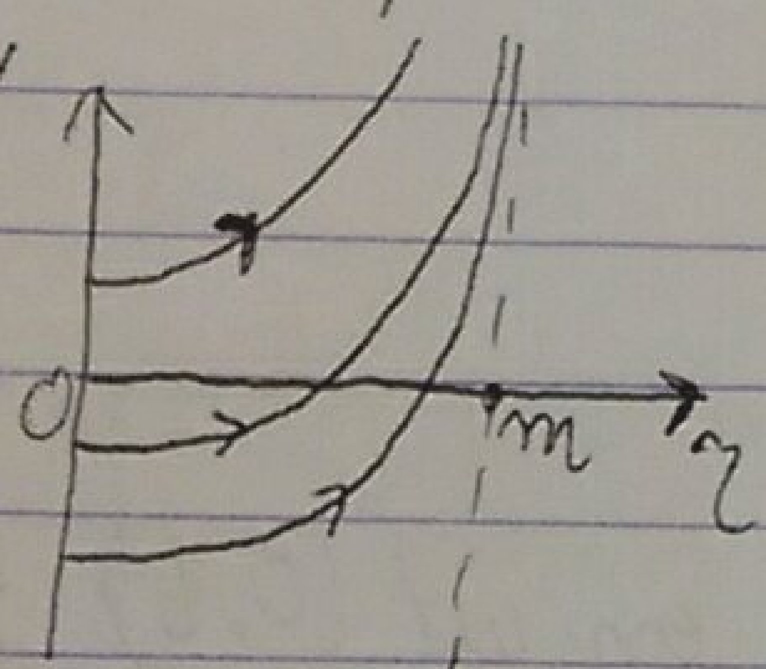
c) • $v = t + r_*$ dus $dv = dt + \frac{dr_*}{dr}dr = dt + \frac{dr}{\left(1-\frac{m}{r}\right)^2}$.

↳ zie vraag b)

4 Dan is $dt^2 = \left(dv - \frac{dr}{\left(1-\frac{m}{r}\right)^2}\right)^2$, dus invullen in (0.4) geeft

$$ds^2 = -\left(1-\frac{m}{r}\right)^2 dv^2 + 2\,dv\,dr \underbrace{- \frac{dr^2}{\left(1-\frac{m}{r}\right)^2} + \frac{dr^2}{\left(1-\frac{m}{r}\right)^2}}_{\text{vallen weg}} + r^2 d\Omega^2.$$ 2

- 2 Radieel licht volgt uit $ds^2 = d\Omega^2 = 0$, dus $dv = 0$ (v=constant) (ingaand) of $\frac{dr}{dv} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{r}\right)^2$ (uitgaand).
- 4 Voor $r < m$ is $\frac{dr}{dv} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{r}\right)^2$ nog steeds positief voor $r>0$, dus "uitgaande" lichtstralen bewegen in de richting van toenemende r (richting $r=m$) en dus niet in de richting van de singulariteit op $r=0$ (i.t.t. Schwarzschild)!
- 2 Tekening:



$\frac{dr}{dv} = +\infty$ op $r=0$ $\left(\frac{dv}{dr}=0\right)$

$\frac{dr}{dv} = 0$ op $r=m$ $\left(\frac{dv}{dr}=+\infty\right)$

<u>N.B.</u> een lichtstraal kan nog steeds niet ontsnappen naar de regio $r > m$ waar hij was voordat hij in het zwarte gat viel.