MIDTERM-TENTAMEN Zwarte Gaten 2019 - NS159B

Dinsdag, 21 Mei 2019, 11:00–12:30, BBG-115 en 219, Universiteit Utrecht.

1) Schrijf je naam en studentennummer op elk oplossingsblad.

2) Schrijf duidelijk en leesbaar, zonder gekrabbel. Onleesbaar handschrift kan niet nagekeken worden. Structureer je antwoord goed en leg je redenering goed uit.

3) Er zijn twee opgaven. Het gebruik van het dictaat, rekenmachines, smartphone, is niet toegestaan. Het resultaat telt mee voor 30% van het eindcijfer.

Formularium

De zwaartekracht constante is $G_N = 6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$, en de gravitationele potentiaal V tussen twee massa's op afstand r is

$$V = -G_N \frac{m_1 m_2}{r} . \quad (1)$$

De lichtsnelheid is, afgerond, $c = 3 \times 10^5 km/s$. Een lichtseconde is de afstand die het licht aflegt in 1 seconde. De Schwarzschild straal is gegeven door $r_s = 2G_N M/c^2$ en in dit tentamen verwaarlozen we de spin van het zwarte gat.

1. Korte vragen (20 punten)

a) Geef de afleiding van de ontsnappingssnelheid en vervolgens van de Schwarzschild straal voor een zwart gat, gebruik makende van de Newtoniaanse klassieke mechanica (zoals Laplace en Michell dat deden in de 18e eeuw).

b) Met wat voor soort telescopen (i.e. welke golflengte) kijken we naar het Sagittarius A systeem? Wat zien we dan precies, meer concreet, wat zijn Sagittarius East en West, en wat zien we als we nog dichter bij kijken? Hoe dichtbij kunnen we tot nu toe kijken naar de omgeving van het zwarte gat Sagittarius A*? (Wees bondig in je antwoorden.)

c) Wat is het equivalentieprincipe, en waarom werkt het slechts lokaal over korte afstanden?

d) Leg uit hoe je met behulp van de zwaartekracht een dubbel beeld kan krijgen van een object achter een zwart gat, zodat je de indruk krijgt dat je twee objecten op verschillende plaatsen ziet staan. Maak een tekening/schets om dit te verduidelijken.

2. Schwarzschild metriek (10 punten)

Beschouw de volgende metriek op de ruimtetijd

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2G_N M}{r\,c^2}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 + \frac{1}{1 - \frac{2G_N M}{r\,c^2}} \mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}\Omega^2 \,, \tag{2}$$

waarbij $\mathrm{d}\Omega^2$ de metriek is op een twee-dimensionale bol, maar die verder onbelangrijk is voor deze opgave. M is de massa van een planeet, ster, of een zwart gat. Voor $M = 0$, oftewel $r \to \infty$, is de metriek die van de Minkowski ruimte.

Beschouw nu lichtstralen die in radiële richting voortbewegen.

a) Toon aan dat deze lichtstralen voldoen aan

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm c \left(1 - \frac{2G_N M}{r\,c^2}\right) \,. \tag{3}$$

Wat betekenen de $\pm$ oplossingen? Maak een tekening in het (r, t) vlak met de banen die het licht volgen.

b) Toon vervolgens aan dat deze lichtstralen voldoen aan

$$ct = \pm r_* + \text{constante}\,, \qquad r_* = r + \frac{2G_N M}{c^2} \ln\left(\frac{r\,c^2}{2G_N M} - 1\right) \,, \tag{4}$$

waarbij we veronderstellen dat $r > r_s$. Concreet: toon aan dat (4) een oplossing is van (3) en dus de banen van radieel voortbewegend licht bepalen.