

## MIDTERM-TENTAMEN Zwarte Gat 2022 - NS159B

Donderdag, 19 Mei 2022, 13:30–16:30, Educatorium Alfa, Universiteit Utrecht.

- 1) Schrijf je naam en studentnummer op elk oplossingsblad.
- 2) Schrijf duidelijk en leesbaar, zonder gekrabbel. Onleesbaar handschrift kan niet nagekeken worden. Structureer je antwoord goed en leg je redenering goed uit.
- 3) Er zijn vier opgaven. Het gebruik van het dictaat en internet devices zijn niet toegestaan.

### Formularium

De zwaartekracht constante is  $G_N = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}$ , en de gravitationele potentiaal  $V$  tussen twee massa's op afstand  $r$  is

$$V = G_N \frac{m_1 m_2}{r} . \quad (1)$$

De lichtsnelheid is, afgerond,  $c = 3 \times 10^8 \text{ km/s}$ . Een lichtseconde is de afstand die het licht aflegt in 1 seconde. Een lichtjaar is, afgerond,  $10^{16} \text{ m}$ .

De Schwarzschild straal is gegeven door  $r_s = 2G_N M/c^2$  en in dit tentamen verwaarlozen we de spin van het zwarte gat.

De massa van de zon is  $M_\odot = 1.9 \times 10^{30} \text{ kg}$ .

### 1. Ontsnappingsnelheid (2 punten)

Geef de afleiding van de ontsnappingsnelheid en vervolgens van de Schwarzschild straal voor een zwart gat, gebruik makende van de Newtoniaanse klassieke mechanica (zoals Laplace en Michell dat deden in de 18e eeuw). Gebruik hiervoor de wet van behoud van energie (som van kinetische plus potentiële energie). Wat is het essentiële verschil tussen zo'n Newtoniaans en Einstein zwart gat? Maak eventueel een tekening om je antwoord te illustreren.

### 2. Sagittarius A\* (3 punten)

- X-10y*
- a) Met wat voor soort telescopen (i.e. welke soort golflengte) kijken we naar het Sagittarius A systeem? Wat zien we dan zoal, meer concreet, wat zijn Sagittarius A East en West, en wat zien we als we nog dichterbij kijken, binnen afstanden van ongeveer 0.1 lichtjaar tot het centrum Sagittarius A\*? Illustreer dit laatste

met een schets. Hoe dichtbij kunnen we tot nu toe waarnemingen doen van het zwarte gat Sagittarius A\*? (Wees bondig in je antwoorden, enkele zinnen volstaan.)

- b) Het zwarte gat Sagittarius A\* heeft een massa van ongeveer 4 miljoen zonnemassa. Bereken de Schwarzschildstraal en druk deze uit in lichtminuten.

### 3. Korte vragen (2 punten)

- a) Leg zo goed mogelijk uit in enkele zinnen waarom Röntgenstraling (X-rays) niet door de atmosfeer kunnen, en radiostralen wel. Wat hebben X-stralen verder te maken met zwarte gaten, i.e. wat zien we als we naar stellaire zwarte gaten zoals Cygnus X-1 kijken met X-ray telescopen? Waar komen die stralen precies vandaan?
- b) Waaruit bestaat een witte dwerg, i.e. welk soort atomen? Binnen een witte dwerg zijn er geen kernreacties meer waardoor er geen uitwaartse druk meer is. Waarom stort een witte dwerg dan niet verder in onder de invloed van de zwaartekracht?

### 4. Hawking temperatuur (3 punten)

De Hawking temperatuur en de horizon van een geladen zwart gat, met dimensieloze lading  $q_*$ , zijn gegeven door

$$k_B T = \frac{\hbar c^3}{2\pi G_N M} \frac{\sqrt{1 - q_*^2}}{(1 + \sqrt{1 - q_*^2})^2}. \quad (2)$$

- a) Voor welke waarde van de lading is de temperatuur het hoogst, en voor welke waarde het laagst? Wat is dan de temperatuur, uitgedrukt in  $M$  en de fundamentele natuurconstanten?
- b) Teken een grafiek voor de Hawking temperatuur als functie van  $q_*$ , waarbij we de massa  $M$  constant houden.

De horizon van een geladen zwart gat is gegeven door

$$r_+ = \frac{G_N M}{c^2} \left(1 + \sqrt{1 - q_*^2}\right). \quad (3)$$

- c) Schrijf de formule voor de temperatuur in termen van de horizon en toon aan dat

$$k_B T = \frac{\hbar c}{2\pi} \frac{(r_+ - G_N M/c^2)}{r_+^2}. \quad (4)$$

- d) Teken een grafiek voor de Hawking temperatuur als functie van  $r_+$ , waarbij we de massa  $M$  constant houden.