Antwoorden tentamen Bewijzen in de Wiskunde (WISB102)
Donderdag 7 november 2019

Docenten: *Martin Bootsma & Carel Faber & Heinz Hanßmann & Jan-Willem van Ittersum & Johan van de Leur & Guido Terra-Bleeker*

Opgave 1 (nieuw vel papier)

(a). (*2 punten*) Laat P en Q twee beweringen zijn. Laat zien dat de beweringen $\sim (P \wedge Q)$ en $(\sim P) \vee (\sim Q)$ logisch equivalent zijn. (Je mag hierbij (uiteraard) geen gebruik maken van de rekenregels voor beweringen; dit is immers zelf één van de rekenregels.)

Voor het vervolg van de opgave beschouwen we de volgende twee beweringen:

$$A\colon \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \exists\, n \in \mathbb{Z}\colon \quad x \leq n \leq x+1.$$

$$B\colon \qquad \exists\, n \in \mathbb{Z}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\colon \quad x \leq n \leq x+1.$$

(b). (*2 punten*) Herformuleer de ontkenning van bewering A zodanig dat er geen expliciete ontkenning meer in voorkomt.

(c). (*2 punten*) Herformuleer de ontkenning van bewering B zodanig dat er geen expliciete ontkenning meer in voorkomt.

(d). (*2 punten*) Bewijs of weerleg bewering A.

(e). (*2 punten*) Bewijs of weerleg bewering B.

Uitwerking.

(a). Dit kan met een waarheidstabel:

P	Q	$P \wedge Q$	$\sim (P \wedge Q)$	$\sim P$	$\sim Q$	$(\sim P) \vee (\sim Q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

Aangezien de vierde en de zevende kolom overeenkomen, is de logische equivalentie bewezen.

(b) en (c) Bij het uitschrijven van een ontkenning verandert $\forall$ in $\exists$ en omgekeerd. De uiteindelijke bewering $x \leq n \leq x+1$ (waarvan we de ontkenning moeten vinden) bestaat uit de conjunctie $(x \leq n) \wedge (n \leq x+1)$. De ontkenning daarvan is de disjunctie van de ontkenningen (vergelijk (a)). Antwoorden:

$$\sim A\colon \qquad \exists\, x \in \mathbb{R}, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}\colon \quad (n < x) \vee (n > x+1).$$

$$\sim B\colon \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad \exists\, x \in \mathbb{R}\colon \quad (n < x) \vee (n > x+1).$$

(d) Bewering A is waar. Bewijs: gegeven $x \in \mathbb{R}$, neem $n = \lceil x \rceil$, het plafond van x. Dit is het kleinste gehele getal dat groter dan of gelijk aan x is. Dus $n \in \mathbb{Z}$ en $x \leq n$. Ook $n < x + 1$, want als $n \geq x + 1$, dan $n - 1 \geq x$, tegenspraak met de definitie van n.

(e) Bewering B is niet waar. Tegenvoorbeeld: voor $n \in \mathbb{Z}$ kunnen we $x = n - 10$ nemen. Dan $x \in \mathbb{R}$ en $x \leq n$, maar zeker niet $n \leq x + 1 = n - 9$.

Opgave 2 (nieuw vel papier)

In deze opgave beschouwen we de volgende vier functies:

$$
\begin{aligned}
f\colon &\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon & f(x) &= \frac{x^2}{x^2+1}\,, \\
g\colon &\quad \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}\colon & g(x) &= \frac{x^2}{x^2+1}\,, \\
h\colon &\quad \mathbb{R} \to [0,1)\colon & h(x) &= \frac{x^2}{x^2+1}\,, \\
k\colon &\quad \mathbb{R}_{\geq 0} \to [0,1)\colon & k(x) &= \frac{x^2}{x^2+1}\,.
\end{aligned}
$$

Hierin is $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ de verzameling van alle niet-negatieve reële getallen.

(a). (*4 punten*) Welke van deze vier functies zijn injectief?

(b). (*4 punten*) Welke van deze vier functies zijn surjectief?

(c). (*2 punten*) Welke van deze vier functies zijn bijectief?

Ter herinnering: laat duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs al je beweringen.

Uitwerking.

(a) en (b) en (c) Het eerste wat opvalt is dat het functievoorschrift steeds hetzelfde is (d.w.z., x wordt steeds naar $x^2/(x^2+1)$ gestuurd), maar dat de verschillen alleen zitten in de domeinen en codomeinen. Vervolgens is onmiddellijk duidelijk dat het beeld van x gelijk is aan dat van $-x$, dus als voor een $x \neq 0$ zowel x als $-x$ in het domein zitten, is de functie zeker niet injectief. Dus f en h zijn niet injectief. Uit het feit dat het beeld van x gelijk is aan dat van $-x$ volgt ook direct dat alle vier functies hetzelfde beeld hebben: $f(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R}_{\geq 0}) = h(\mathbb{R}) = k(\mathbb{R}_{\geq 0})$. Dit moet een deelverzameling zijn van $[0,1)$ (anders zouden h en k niet goed gedefinieerd zijn), dus f en g zijn zeker niet surjectief. (Het is natuurlijk ook duidelijk dat $0 \leq x^2/(x^2+1) < 1$ voor alle x.)

Als g injectief is, dan k ook, en omgekeerd. Is dit het geval? Stel a en b hebben hetzelfde beeld, dan $a^2/(a^2+1) = b^2/(b^2+1)$, dan $a^2(b^2+1) = b^2(a^2+1)$, dus $a^2 = b^2$, dus $a = b$ of $a = -b$. Maar het domein van g en van k is $\mathbb{R}_{\geq 0}$, dus uit $a = -b$ volgt $a = b (= 0)$. Dus g en k zijn injectief.

Als h surjectief is, dan k ook, en omgekeerd. Is dit het geval? Stel $y \in [0,1)$. Is er een $x \in \mathbb{R}$ met $x^2/(x^2+1) = y$? Dan $1 - y = 1/(x^2+1)$, dus $x^2 + 1 = 1/(1-y)$ (merk op $1 - y \neq 0$). Dit heeft een oplossing precies dan als $1/(1-y) \geq 1$, dus als $0 < 1 - y \leq 1$, dus als $y \in [0,1)$; dit is precies wat we aannamen. (Je kunt ook zeggen:

$x = \pm\sqrt{y/(1-y)}$, waarbij je dan wel op moet merken dat $y/(1-y) \geq 0$.) Dus h en k zijn surjectief.

Een functie is bijectief dan en slechts dan als zij injectief en surjectief is. Alleen k is dus bijectief.

Opgave 3 (nieuw vel papier)

De rij a_n wordt recursief gedefinieerd voor alle $n \in \mathbb{N}$ door $a_1 = 5$, $a_2 = 55$ en, voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 3$, door

$$a_n = 11a_{n-1} - 24a_{n-2}\,.$$

(a). (*5 punten*) Bewijs voor alle $n \in \mathbb{N}$ dat

$$a_n = 8^n - 3^n.$$

(b). (*4 punten*) Bewijs dat $a_n \equiv 5 \pmod{10}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(c). (*1 punt*) Wat is het laatste cijfer van a_{2019} (in het tientallig stelsel) ?

Uitwerking.

(a) We bewijzen deze bewering door middel van sterke inductie naar n. Allereerst merken we op dat $a_1 = 5 = 8^1 - 3^1$ en $a_2 = 55 = 8^2 - 3^2$. Zij $k \in \mathbb{N}$. Onze inductiehypothese is nu dat $a_i = 8^i - 3^i$ voor alle $i \in \mathbb{N}$ met $i \leq k$. Merk op dat $k+1 \geq 2$. Indien $k+1 = 2$ geldt inderdaad dat $a_{k+1} = 8^{k+1} - 3^{k+1}$, zoals reeds hierboven opgemerkt. We kunnen dus aannemen dat $k+1 \geq 3$. Dan geldt er (gebruikmakend van de recursieve formule en onze inductiehypothese)

$$a_{k+1} = 11a_k - 24a_{k-1} = 11(8^k - 3^k) - 24(8^{k-1} - 3^{k-1}) = 64\cdot 8^{k-1} - 9\cdot 3^{k-1} = 8^{k+1} - 3^{k+1}.$$

Hiermee hebben we dus inductief bewezen dat $a_n = 8^n - 3^n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Ook het tweede deel doen we door middel van sterke inductie: we bewijzen dat $a_n \equiv 5 \pmod{10}$. Allereerst merken we op dat $a_1 = 5 \equiv 5 \pmod{10}$ en dat $a_2 = 55 \equiv 5 \pmod{10}$. Zij $k \in \mathbb{N}$. Onze inductiehypothese is in dit geval dat $a_i \equiv 5 \pmod{10}$ voor alle $i \in \mathbb{N}$ met $i \leq k$. Er geldt nu dat $k+1 \geq 2$. Indien $k+1 = 2$ geldt inderdaad dat $a_{k+1} \equiv 5 \pmod{10}$, zoals reeds hierboven opgemerkt. We kunnen dus aannemen dat $k+1 \geq 3$. Dus $a_{k+1} = 11a_k - 24a_{k-1}$. Vanwege onze inductiehypothese volgt dat $10 \mid a_k - 5$ en $10 \mid a_{k-1} - 5$. Dus er bestaan $l, m \in \mathbb{Z}$ met $a_k = 10l + 5$ en $a_{k-1} = 10m + 5$. Hieruit volgt dat

$$a_{k+1} = 11(10l+5) - 24(10m+5) = 10(11l - 24m - 7) + 5.$$

Er geldt dus dat $10 \mid a_{k+1} - 5$, oftewel $a_{k+1} \equiv 5 \pmod{10}$.

(c) Als b een positief geheel getal is en b wordt geschreven als $b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0$ in het tientallig stelsel (dus b heeft $m+1$ cijfers en $b_m \neq 0$ en $b_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ voor alle i met $0 \leq i \leq m$), dan $b = b_m 10^m + b_{m-1}10^{m-1} + \cdots + b_1 10^1 + b_0$, dus $b \equiv b_0 \pmod{10}$. We weten uit (b) dat a_{2019} een positief geheel getal is en dat $a_{2019} \equiv 5 \pmod{10}$. Dus het laatste cijfer van a_{2019} is congruent met $5 \pmod{10}$, dus het laatste cijfer is 5.

Opgave 4 (nieuw vel papier)

Neem aan dat de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differentieerbaar zijn in het punt $x = a$ met afgeleide $f'(a)$ en $g'(a)$, respectievelijk. Definieer de functie h als de som van de functies f en g. Oftewel, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $h(x) = f(x) + g(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(a). (*1 punt*) Geef de definitie van differentieerbaarheid van f in a in termen van een limiet.

(b). (*2 punten*) Geef de definitie van differentieerbaarheid van f in a in termen van ε en δ.

(c). (*7 punten*) Bewijs, gebruik makend van de ε - δ definities van differentieerbaarheid, dat de functie h differentieerbaar is in het punt $x = a$ en laat zien dat de afgeleide in het punt $x = a$ wordt gegeven door $h'(a) = f'(a) + g'(a)$. Je mag hierbij geen gebruik maken van de rekenregels voor limieten.

Uitwerking.

Gegeven: Functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zijn differentieerbaar in het punt $x = a$.

1. **Definitie**: Differentieerbaarheid van f in a betekent dat
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

2. Wanneer we dit verder uitwerken met behulp van de definitie van limiet in termen van ε en δ, betekent dit dat
$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists\, \delta > 0\colon \forall x \in \mathbb{R}\colon \quad 0 < |x - a| < \delta \implies \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < \varepsilon.$$

Definitie: $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon h(x) = f(x) + g(x)$.

3. **Te bewijzen**: h is differentieerbaar in het punt $x = a$ met afgeleide $h'(a) = f'(a) + g'(a)$.
Bewijs. We gaan dus bewijzen dat
$$\lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = f'(a) + g'(a).$$
Neem aan dat $\varepsilon > 0$. Omdat $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ en f differentieerbaar is in a is er dan een $\delta_f > 0$ zodanig dat
$$\forall x \in \mathbb{R}\colon \quad 0 < |x - a| < \delta_f \implies \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$
Evenzo is er, omdat g ook differentieerbaar is in a, een $\delta_g > 0$ zodanig dat
$$\forall x \in \mathbb{R}\colon \quad 0 < |x - a| < \delta_g \implies \left| \frac{g(x) - g(a)}{x - a} - g'(a) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$
Kies nu $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ en zij $x \in \mathbb{R}$ zodanig dat $0 < |x - a| < \delta$ gegeven. Omdat $\delta \leq \delta_f$, impliceert dit dat $0 < |x - a| < \delta_f$ en dus is de conclusie van (1) ook waar. Evenzo volgt uit $0 < |x - a| < \delta \leq \delta_g$ dat de conclusie in (2) ook waar is. Op grond

daarvan kunnen we nu ook concluderen dat:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{h(x)-h(a)}{x-a} - \big(f'(a)+g'(a)\big)\right| &= \left|\frac{(f(x)+g(x))-(f(a)+g(a))}{x-a} - f'(a)-g'(a)\right| = \\
&= \left|\frac{f(x)-f(a)+g(x)-g(a)}{x-a} - f'(a)-g'(a)\right| = \\
&= \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) + \frac{g(x)-g(a)}{x-a} - g'(a)\right| \leq \\
&\leq \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| + \left|\frac{g(x)-g(a)}{x-a} - g'(a)\right| < \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Hierin is de eerste ongelijkheid een toepassing van de driehoeksongelijkheid en de stricte ongelijkheid een gevolg van de conclusies uit (1) en (2). Hiermee is bewezen dat

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = f'(a)+g'(a),$$

oftewel, dat h differentieerbaar is in a met afgeleide $h'(a) = f'(a)+g'(a)$. $\square$

Opgave 5 (nieuw vel papier)

In deze opgave gebruiken we de notatie $\mathbb{R}^2$ voor het Cartesisch product $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Vervolgens definiëren we de relatie R op $\mathbb{R}^2$ door

$$(a,b)\,R\,(c,d) \iff a^2-c^2 = d-b.$$

(a). (*4 punten*) Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

Voor elke $h\in\mathbb{R}$ definiëren we de verzameling $A_h = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y=h\}$.

(b). (*3 punten*) Bewijs dat de collectie verzamelingen $\{A_h\}_{h\in\mathbb{R}}$ een partitie is van $\mathbb{R}^2$.

(c). (*3 punten*) Bewijs voor alle $h\in\mathbb{R}$ dat

$$A_h = \big[(0,h)\big]\ .$$

Hierin is $\big[(0,h)\big]$ de equivalentieklasse van $(0,h)$ ten opzichte van de relatie R.

Uitwerking.

Gegeven: De relatie R op $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$(a,b)\,R\,(c,d) \iff a^2-c^2 = d-b.$$

1. **Te bewijzen**: R is een equivalentierelatie.

   Bewijs. We gaan laten zien dat de relatie R reflexief, symmetrisch en transitief is:

   reflexiviteit: Zij $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ gegeven. Dan is $a^2-a^2 = 0 = b-b$, en dus $(a,b)\,R\,(a,b)$.

symmetrie: Neem aan dat $(a, b)\,R\,(c, d)$. Dan is $a^2 - c^2 = d - b$. Dan is dus ook $c^2 - a^2 = -(a^2 - c^2) = -(d - b) = b - d$ en dus $(c, d)\,R\,(a, b)$.

transitiviteit: Neem aan dat $(a, b)\,R\,(c, d)$ en $(c, d)\,R\,(e, f)$. Dan is $a^2 - c^2 = d - b$ en $c^2 - e^2 = f - d$. Door deze twee vergelijkingen bij elkaar op te tellen, zien we dat dan ook moet gelden dat

$$a^2 - e^2 = (a^2 - c^2) + (c^2 - e^2) = (d - b) + (f - d) = f - b.$$

Dit betekent dat $(a, b)\,R\,(e, f)$.

Omdat de relatie R reflexief, symmetrisch en transitief is, kunnen we concluderen dat R een equivalentierelatie is. □

Gegeven: $A_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y = h\}$, voor elke $h \in \mathbb{R}$.

2. **Te bewijzen**: De collectie $\{A_h\}_{h\in\mathbb{R}}$ is een partitie van $\mathbb{R}^2$.

Bewijs. We gaan achtereenvolgens aantonen dat

(i) $A_h \neq \emptyset$ voor alle $h \in \mathbb{R}$,

(ii) de $\{A_h\}_{h\in\mathbb{R}}$ paarsgewijs disjunct zijn,

(iii) hun vereniging gelijk is aan $\mathbb{R}^2$.

Namelijk:

(i) Zij $h \in \mathbb{R}$ gegeven. Het punt $(x, y) = (0, h) \in \mathbb{R}^2$ voldoet aan $x^2 + y = 0^2 + h = h$, dus $(0, h) \in A_h$. Dus $A_h \neq \emptyset$, voor alle $h \in \mathbb{R}$.

(ii) Stel dat $h \neq k$ en neem aan dat $(x, y) \in A_h$. Dan is $x^2 + y = h \neq k$, dus $(x, y) \notin A_k$. Dus er is geen enkele $(x, y) \in A_h$ die ook in A_k zit. Met andere woorden, $A_h \cap A_k = \emptyset$, wanneer $h \neq k$.

(iii) Zij $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Kies dan $h = x^2 + y \in \mathbb{R}$. Dan geldt dat $(x, y) \in A_h$ en dus ook

$$(x, y) \in \bigcup_{h\in\mathbb{R}} A_h.$$

Hiermee hebben we bewezen dat $\mathbb{R}^2 \subseteq \bigcup_{h\in\mathbb{R}} A_h$. Aangezien de omgekeerde inclusie triviaal is, hebben we dus bewezen dat

$$\bigcup_{h\in\mathbb{R}} A_h = \mathbb{R}^2.$$

Hiermee is bewezen dat de collectie $\{A_h\}_{h\in\mathbb{R}}$ een partitie is van $\mathbb{R}^2$. □

3. **Te bewijzen**: $A_h = \big[(0, h)\big]$, voor elke $h \in \mathbb{R}$.

Bewijs. We zullen bewijzen dat $A_h \subseteq [(0, h)]$ en dat $A_h \supseteq [(0, h)]$:

$\subseteq$: Neem aan dat $(x, y) \in A_h$. Dan is $x^2 + y = h$, dus $x^2 - 0^2 = x^2 = h - y$. Dit betekent dat $(x, y)\,R\,(0, h)$ en dus dat $(x, y) \in [(0, h)]$.

$\supseteq$: Neem nu aan dat $(x, y) \in [(0, h)]$. Dat betekent dat $(x, y)\,R\,(0, h)$. Met andere woorden: $x^2 - 0^2 = h - y$. Door aan beide kanten y op te tellen, kunnen we deze vergelijking herschrijven tot $x^2 + y = h$, hetgeen betekent dat $(x, y) \in A_h$.

We hebben nu dus bewezen dat $A_h = [(0, h)]$. □

Opgave 6 (nieuw vel papier)

In deze opgave zijn A en B deelverzamelingen van een overaftelbare verzameling U.

(a). (*4 punten*) Bewijs dat $A \cup B$ aftelbaar is als A en B aftelbaar zijn en hun doorsnede $A \cap B$ leeg is.

(b). (*3 punten*) Bewijs:

$$A \text{ is aftelbaar} \implies U - A \text{ is overaftelbaar.}$$

(c). (*3 punten*) Bewijs of weerleg:

$$B \text{ is overaftelbaar} \implies U - B \text{ is aftelbaar.}$$

Uitwerking.

Gegeven: A en B zijn twee disjuncte, aftelbare verzamelingen.

1. **Te bewijzen**: $A \cup B$ is aftelbaar.

   Bewijs. We onderscheiden de volgende vier gevallen:

   (i) A is leeg,

   (ii) A en B zijn beide eindig (maar niet leeg),

   (iii) A is eindig (maar niet leeg) en B is (aftelbaar) oneindig,

   (iv) A en B zijn beide (aftelbaar) oneindig.

   De overige gevallen (waarbij B leeg/eindig is en A (aftelbaar) oneindig) gaan analoog aan gevallen (i) en (iii) maar met de rollen van A en B omgedraaid. Namelijk:

   (i) Als $A = \emptyset$, dan is $A \cup B = B$ aftelbaar, omdat B aftelbaar is.

   (ii) Als A en B beide eindig (maar niet leeg) zijn, dan bestaan er aftellingen zodat ze te schrijven zijn als $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots a_m\}$ en $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots b_n\}$, waarbij m het aantal elementen van A en n het aantal elementen van B zijn. Dat betekent dat de vereniging af te tellen is volgens $A \cup B = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$, met eerst de m elementen van A, gevolgd door de n elementen van B, en het aantal elementen van $A \cup B$ is $m + n$. De vereniging $A \cup B$ is dus eindig, en dus aftelbaar.

   (iii) Als A eindig (maar niet leeg) is en B is (aftelbaar) oneindig, dan is A weer te schrijven als $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots a_m\}$ en er bestaat ook een aftelling van B zodat deze te schrijven is als $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$. Dit levert een aftelling van de vereniging volgens

   $$A \cup B = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m, b_1, b_2, b_3, \ldots\},$$

   met eerst de eindig vele elementen van A, gevolgd door de aftelling van B. Omdat A eindig is, levert dit een goed gedefinieerd rijtje op, waarin eerst alle elementen van A voorkomen en dan alle elementen van B, en geen enkel element van $A \cup B$ komt twee keer voor omdat geen van de elementen $a_k \in A$ gelijk zijn aan een element $b_l \in B$, omdat A en B disjunct zijn (en alle elementen in elk van beide aftellingen afzonderlijk zijn per definitie verschillend). De vereniging $A \cup B$ is dus aftelbaar, met de gegeven aftelling.

(iv) Als A en B beide (aftelbaar) oneindig, dan zijn er aftellingen waardoor A en B te schrijven zijn als $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ en $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$. We kunnen deze aftellingen combineren tot een aftelling van de vereniging

$$A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots\},$$

door afwisselend een element a_k uit de aftelling van A en een element b_l uit de aftelling van B te nemen. Deze rij bevat alle elementen van A (op de oneven posities) en alle elementen van B (op de even posities) en geen van de elementen van $A \cup B$ komt twee keer voor omdat geen van de elementen $a_k \in A$ gelijk zijn aan een element $b_l \in B$, omdat A en B disjunct zijn (en alle elementen in elk van beide aftellingen afzonderlijk zijn per definitie verschillend). De vereniging $A \cup B$ is dus aftelbaar, met de gegeven aftelling. □

N.B. De aftellingen in bovenstaande uitwerking zijn gegeven met “puntje-puntje-puntje”-definities, zoals ook in het boek meermalen gedaan is. Een uitwerking als hierboven zou het maximale aantal punten geven.

Je zou het nog netter kunnen maken door de “puntje-puntje-puntje”-notatie volledig te vermijden, maar dan wordt het wel erg veel werk. Een dergelijke werkwijze, die strict genomen beter is, is aan het eind van deze uitwerking opgenomen. We gaan nu eerst verder met de volgende deelopgaven.

Gegeven: $A, B \subseteq U$ en U is overaftelbaar.

2. **Te bewijzen**: A is aftelbaar $\implies$ $U - A$ is overaftelbaar.

   Bewijs. We geven een bewijs uit het ongerijmde. Neem dus aan dat A aftelbaar is en dat $U - A$ óók aftelbaar zou zijn. In dat geval kunnen we 1 toepassen met $B = U - A$, want A en $U - A$ zijn inderdaad disjunct. Maar dat zou betekenen dat $A \cup B = A \cup (U - A) = U$ aftelbaar zou zijn, in tegenspraak met het gegeven dat U overaftelbaar is. We kunnen dus concluderen dat $U - A$ niet aftelbaar kan zijn als A aftelbaar is. □

3. **Claim**: Het is NIET waar dat

   $$B \text{ is overaftelbaar} \implies U - B \text{ is aftelbaar.}$$

   Bewijs. Om dit te bewijzen gaan we een tegenvoorbeeld geven van een overaftelbare deelverzameling B van een overaftelbare verzameling U waarvoor $U - B$ ook weer overaftelbaar is. Beschouw hiervoor

   $$\begin{aligned} U &= [0, 2], \text{ het (gesloten) interval van 0 tot en met 2,} \\ B &= [1, 2], \text{ het (gesloten) interval van 1 tot en met 2.} \end{aligned}$$

   Dan is $U - B = [0, 1)$. In het boek is bewezen dat alle (niet-lege) intervallen van reële getallen overaftelbaar zijn, dus zowel U, B als $U - B$ zijn overaftelbaar. □

Tot slot volgt hier het **uitgebreidere bewijs** van de eerste deelopgave

1. **Lemma**: A, B aftelbaar (en disjunct) $\implies$ $A \cup B$ aftelbaar.

   Bewijs. We onderscheiden opnieuw de volgende vier gevallen:

   (i) A is leeg,

(ii) A en B zijn beide eindig (maar niet leeg),

(iii) A is eindig (maar niet leeg) en B is (aftelbaar) oneindig,

(iv) A en B zijn beide (aftelbaar) oneindig.

Geval (i) was al zonder "puntje-puntje-puntje"-notatie uitgewerkt, dus we richten ons nu alleen nog op de volgende gevallen:

(ii) **Gegeven**: $A \neq \emptyset$ is eindig en $B \neq \emptyset$ is eindig.
Te bewijzen: $A \cup B$ is eindig (en dus aftelbaar).

Bewijs. Het feit dat A eindig is betekent per definitie dat er een bijectieve functie

$$f\colon \mathbb{N}_{\leq m} \to A$$

bestaat, van $\mathbb{N}_{\leq m}$ naar A. Hierin gebruiken we de notatie $\mathbb{N}_{\leq m} = \{k \in \mathbb{N}\colon k \leq m\}$ en is $m \in \mathbb{N}$ (per definitie) het aantal elementen van A. Evenzo bestaat er een bijectieve functie

$$g\colon \mathbb{N}_{\leq n} \to B$$

van $\mathbb{N}_{\leq n}$ naar B, met $n \in \mathbb{N}$ het aantal elementen van B. We definiëren nu de functie h van $\mathbb{N}_{\leq m+n}$ naar $A \cup B$ volgens

$$h\colon \mathbb{N}_{\leq m+n} \to A \cup B\colon\ h(k) = \begin{cases} f(k), & \text{als } 1 \leq k \leq m, \\ g(k-m), & \text{als } m < k \leq m+n. \end{cases}$$

Claim: Deze functie $h\colon \mathbb{N}_{\leq m+n} \to A \cup B$ is een goed gedefinieerde bijectie.

Bewijs (van de claim): Ten eerste geldt voor elke $k \in \mathbb{N}_{\leq m+n}$ precies één van de twee gevallen $1 \leq k \leq m$ respectievelijk $m < k \leq m+n$. In het eerste geval is $k \in \mathbb{N}_{\leq m}$ en dus is $f(k)$ goed gedefinieerd en $f(k) \in A \subseteq A \cup B$. In het tweede geval is $k-m \in \mathbb{N}_{\leq n}$ en dus is $g(k-m)$ goed gedefinieerd en $g(k-m) \in B \subseteq A \cup B$. De functie h is dus goed gedefinieerd. Bovendien is deze:

injectief: Neem aan dat $h(k) = h(l)$ voor zekere $k, l \in \mathbb{N}_{\leq m+n}$. Dan zijn er twee gevallen (omdat $h(k) = h(l) \in A \cup B$):

- Als $h(k) = h(l) \in A$, dan moet $k \leq m$ (omdat anders $h(k) = g(k-m) \in B$ en dus $h(k) \in A \cap B = \emptyset$). Om eenzelfde reden moet $l \leq m$, en dus geldt dat $f(k) = h(k) = h(l) = f(l)$. Omdat f injectief is, volgt hieruit dat $k = l$.

- Als $h(k) = h(l) \in B$, dan moet $k > m$ (omdat anders $h(k) = f(k) \in A$ en dus $h(k) \in A \cap B = \emptyset$). Om eenzelfde reden moet $l > m$, en dus geldt dat $g(k-m) = h(k) = h(l) = g(l-m)$. Omdat g injectief is, volgt hieruit dat $k - m = l - m$ en dus ook $k = l$.

surjectief: Zij $z \in A \cup B$ gegeven. Dan zijn er twee gevallen:

- Als $z \in A$, dan is er een $k \in \mathbb{N}_{\leq m}$ zodanig dat $f(k) = z$, omdat f surjectief is. Voor deze k geldt dus ook dat $k \in \mathbb{N}_{\leq m+n}$ en $1 \leq k \leq m$ en dus dat $h(k) = f(k) = z$.

- Als $z \in B$, dan is er een $l \in \mathbb{N}_{\leq n}$ zodanig dat $g(l) = z$, omdat g surjectief is. Voor $l + m$ geldt dan dat $l + m \in \mathbb{N}_{\leq m+n}$ en $m < l + m \leq m + n$ en dus dat $h(l+m) = g(l+m-m) = g(l) = z$.

De functie h is dus een bijectie van $\mathbb{N}$ naar $A \cup B$ en we kunnen dus concluderen dat $A \cup B$ aftelbaar oneindig is. $\square$

(iii) **Gegeven**: A is aftelbaar oneindig en B is aftelbaar oneindig.
Te bewijzen: $A \cup B$ is aftelbaar (oneindig).

Bewijs. Omdat A aftelbaar oneindig is bestaat er een bijectieve functie

$$f\colon \mathbb{N} \to A,$$

van $\mathbb{N}$ naar A, en omdat B aftelbaar oneindig is bestaat er ook een bijectieve functie

$$g\colon \mathbb{N} \to B,$$

van $\mathbb{N}$ naar B. We definiëren nu de functie h van $\mathbb{N}$ naar $A \cup B$ volgens

$$h\colon \mathbb{N} \to A \cup B\colon\ h(k) = \begin{cases} f(\frac{k+1}{2}), & \text{als } k \text{ oneven is,} \\ g(\frac{k}{2}), & \text{als } k \text{ even is.} \end{cases}$$

Claim: Deze functie $h\colon \mathbb{N} \to A \cup B$ is een goed gedefinieerde bijectie.

Bewijs (van de claim): Ten eerste is elke $k \in \mathbb{N}$ hetzij even, hetzij oneven, maar nooit beide. In het geval dat k oneven is, is $k+1$ even en dus deelbaar door 2. Dat betekent dat $\frac{k+1}{2} \in \mathbb{N}$ en dus is $f(\frac{k+1}{2})$ in dat geval goed gedefinieerd, en $f(\frac{k+1}{2}) \in A \subseteq A \cup B$. En in het geval dat k even is, dan is $\frac{k}{2} \in \mathbb{N}$ en dus is $g(\frac{k}{2})$ in dat geval goed gedefinieerd, en $g(\frac{k}{2}) \in B \subseteq A \cup B$. De functie h is dus goed gedefinieerd. Bovendien is deze:

injectief: Neem aan dat $h(k) = h(l)$ voor zekere $k, l \in \mathbb{N}$. Dan zijn er twee gevallen (omdat $h(k) = h(l) \in A \cup B$):

- Als $h(k) = h(l) \in A$, dan moet k oneven zijn (omdat anders ook geldt dat $h(k) = g(\frac{k}{2}) \in B$ en dus $h(k) \in A \cap B = \emptyset$). Om eenzelfde reden moet ook l dan oneven zijn, en dus geldt dat $f(\frac{k+1}{2}) = h(k) = h(l) = f(\frac{l+1}{2})$. Omdat f injectief is, volgt hieruit dat $\frac{k+1}{2} = \frac{l+1}{2}$, en dus ook $k = l$.
- Als $h(k) = h(l) \in B$, dan moet k even zijn (omdat anders ook geldt dat $h(k) = f(\frac{k+1}{2}) \in A$ en dus $h(k) \in A \cap B = \emptyset$). Om eenzelfde reden moet ook l dan even zijn, en dus geldt dat $g(\frac{k}{2}) = h(k) = h(l) = g(\frac{l}{2})$. Omdat g injectief is, volgt hieruit dat $\frac{k}{2} = \frac{l}{2}$ en dus ook $k = l$.

surjectief: Zij $z \in A \cup B$ gegeven. Dan zijn er twee gevallen:

- Als $z \in A$, dan is er een $k \in \mathbb{N}$ zodanig dat $f(k) = z$, omdat f surjectief is. Voor $2k-1$ geldt dan dat $2k-1 \in \mathbb{N}$ en $2k-1$ is oneven, hetgeen betekent dat $h(2k-1) = f(\frac{2k-1+1}{2}) = f(k) = z$.
- Als $z \in B$, dan is er een $l \in \mathbb{N}$ zodanig dat $g(l) = z$, omdat g surjectief is. Voor $2l$ geldt dan dat $2l \in \mathbb{N}$ en $2l$ is even, hetgeen betekent dat $h(2l) = g(\frac{2l}{2}) = g(l) = z$.

De functie h is dus een bijectie van $\mathbb{N}$ naar $A \cup B$ en we kunnen dus concluderen dat $A \cup B$ aftelbaar oneindig is. $\square$

In elk van de vier gevallen is nu dus een volledig bewijs gegeven dat $A \cup B$ aftelbaar is. $\square$

Zoals je ziet is in elk van de drie gevallen het bewijs dat de desbetreffende functie h bijectief is nagenoeg hetzelfde. In feite is het telkens een speciaal geval van lemma 18 in paragraaf 11.5, over de stelling van Schröder-Bernstein, uit het tekstboek. Je had hier dus ook dat lemma kunnen aanhalen om dat deel van dit bewijs iets in te korten, hoewel je in dat geval toch ook nog moet checken dat aan alle voorwaarden van dat lemma voldaan wordt, dus erg veel korter wordt het daar niet van.

Solutions Exam "Bewijzen in de Wiskunde" (WISB102) (first half only) Thursday, November 7, 2019

Instructors: *Martin Bootsma & Carel Faber & Heinz Hanßmann & Jan-Willem van Ittersum & Johan van de Leur & Guido Terra-Bleeker*

Exercise 1 (new sheet of paper)

(a). (*2 points*) Consider two statements P and Q. Show that the statements $\sim (P \wedge Q)$ and $(\sim P) \vee (\sim Q)$ are logically equivalent. (You are not allowed to make use of the basic laws for logical equivalence for this; it is one of those laws by itself, after all.)

In the remainder of this exercise we consider the following two statements:

$$A: \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{Z}: \quad x \leq n \leq x+1.$$

$$B: \quad \exists n \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in \mathbb{R}: \quad x \leq n \leq x+1.$$

(b). (*2 points*) Reformulate the negation of statement A such that it does not contain an explicit negation any more.

(c). (*2 points*) Reformulate the negation of statement B such that it does not contain an explicit negation any more.

(d). (*2 points*) Prove or disprove statement A.

(e). (*2 points*) Prove or disprove statement B.

Solution.

(a). We can use a truth table:

P	Q	$P \wedge Q$	$\sim (P \wedge Q)$	$\sim P$	$\sim Q$	$(\sim P) \vee (\sim Q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

Since the fourth and seventh column agree, the logical equivalence has been proved.

(b) and (c) Writing out a negation, we must change $\forall$ into $\exists$ and conversely. The statement $x \leq n \leq x+1$ (whose negation we need) consists of the conjunction $(x \leq n) \wedge (n \leq x+1)$. Its negation is the disjunction of the negations (compare (a)). The answers:

$$\sim A\colon \qquad \exists\, x \in \mathbb{R}, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}\colon \quad (n < x) \vee (n > x+1).$$

$$\sim B\colon \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad \exists\, x \in \mathbb{R}\colon \quad (n < x) \vee (n > x+1).$$

(d) Statement A is true. Proof: given $x \in \mathbb{R}$, take $n = \lceil x \rceil$, the ceiling of x. This is the least integer that is greater than or equal to x. So $n \in \mathbb{Z}$ and $x \leq n$. Also $n < x+1$, for if $n \geq x+1$, then $n-1 \geq x$, contradiction with the definition of n.

(e) Statement B is false. Counterexample: for $n \in \mathbb{Z}$ we can take $x = n-10$. Then $x \in \mathbb{R}$ and $x \leq n$, but certainly not $n \leq x+1 = n-9$.

Exercise 2 (new sheet of paper)

In this exercise we consider the following four functions:

$$f\colon \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon \qquad f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}\,,$$

$$g\colon \qquad \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}\colon \qquad g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}\,,$$

$$h\colon \qquad \mathbb{R} \to [0,1)\colon \qquad h(x) = \frac{x^2}{x^2+1}\,,$$

$$k\colon \quad \mathbb{R}_{\geq 0} \to [0,1)\colon \quad k(x) = \frac{x^2}{x^2+1}\,.$$

Here we use $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$ to denote the set of all non-negative real numbers.

(a). (*4 points*) Which of these four functions are injective?

(b). (*4 points*) Which of these four functions are surjective?

(c). (*2 points*) Which of these four functions are bijective?

Reminder: show clearly how you obtain your answers and prove all your claims.

Solution.

(a) and (b) and (c) We first note that all four functions send x to $x^2/(x^2+1)$; only the domains and codomains differ. Next, we see that the image of x equals that of $-x$, so if for $x \neq 0$ both x and $-x$ are in the domain, then the function is certainly not injective. So f and h are not injective. From the fact that x and $-x$ have the same image, it also follows directly that the four functions have the same range: $f(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R}_{\geq 0}) = h(\mathbb{R}) = k(\mathbb{R}_{\geq 0})$. The range must be a subset of $[0,1)$ (otherwise h and k would not be well-defined), so f and g are not surjective. (Of course, it is also clear that $0 \leq x^2/(x^2+1) < 1$ for all x.)

If g is injective, then k as well, and conversely. Is this the case? Suppose a and b have the same image, then $a^2/(a^2+1) = b^2/(b^2+1)$, so $a^2(b^2+1) = b^2(a^2+1)$, so $a^2 = b^2$, so $a = b$ or $a = -b$. But the domain of g and of k is $\mathbb{R}_{\geq 0}$, so from $a = -b$ we get $a = b (= 0)$. So g and k are injective.

If h is surjective, then k as well, and conversely. Is this the case? Suppose $y \in [0, 1)$. Is there an $x \in \mathbb{R}$ with $x^2/(x^2+1) = y$? Then $1 - y = 1/(x^2+1)$, so $x^2 + 1 = 1/(1-y)$ (note that $1 - y \neq 0$). This has a solution exactly if $1/(1-y) \geq 1$, so if $0 < 1 - y \leq 1$, so if $y \in [0, 1)$; this is exactly what we assumed. (You can also say: $x = \pm\sqrt{y/(1-y)}$, but then you must note that $y/(1-y) \geq 0$.) So h and k are surjective.

A function is bijective if and only if it is injective and surjective. Therefore, only k is bijective.

Exercise 3 (new sheet of paper)

The sequence a_n is defined recursively for all $n \in \mathbb{N}$ by $a_1 = 5$, $a_2 = 55$ and, for all $n \in \mathbb{N}$ for which $n \geq 3$, by

$$a_n = 11a_{n-1} - 24a_{n-2}\,.$$

(a). (*5 points*) For all $n \in \mathbb{N}$, prove that

$$a_n = 8^n - 3^n.$$

(b). (*4 points*) Prove that $a_n \equiv 5 \pmod{10}$ for all $n \in \mathbb{N}$.

(c). (*1 point*) What is the final digit of a_{2019} (in the decimal number system) ?

Solution.

(a) We prove this using strong induction in n. First we note that $a_1 = 5 = 8^1 - 3^1$ and $a_2 = 55 = 8^2 - 3^2$. Let $k \in \mathbb{N}$. Our induction hypothesis is that $a_i = 8^i - 3^i$ for all $i \in \mathbb{N}$ with $i \leq k$. Note that $k+1 \geq 2$. If $k+1 = 2$ then indeed $a_{k+1} = 8^{k+1} - 3^{k+1}$, as pointed out already. We can therefore assume that $k+1 \geq 3$. Then, using the recursive formula and the induction hypothesis, we find that

$$a_{k+1} = 11a_k - 24a_{k-1} = 11(8^k - 3^k) - 24(8^{k-1} - 3^{k-1}) = 64 \cdot 8^{k-1} - 9 \cdot 3^{k-1} = 8^{k+1} - 3^{k+1}.$$

So we have inductively proved that $a_n = 8^n - 3^n$ for all $n \in \mathbb{N}$.

(b) Again, we use strong induction: we prove that $a_n \equiv 5 \pmod{10}$. First we note that $a_1 = 5 \equiv 5 \pmod{10}$ and that $a_2 = 55 \equiv 5 \pmod{10}$. Let $k \in \mathbb{N}$. Our induction hypothesis is in this case that $a_i \equiv 5 \pmod{10}$ for all $i \in \mathbb{N}$ with $i \leq k$. Again, we have that $k+1 \geq 2$. If $k+1 = 2$ then indeed $a_{k+1} \equiv 5 \pmod{10}$, as pointed out already. We may thus assume that $k+1 \geq 3$. So $a_{k+1} = 11a_k - 24a_{k-1}$. Because of our induction hypothesis it follows that $10 \mid a_k - 5$ and $10 \mid a_{k-1} - 5$. So there exist $l, m \in \mathbb{Z}$ with $a_k = 10l + 5$ and $a_{k-1} = 10m + 5$. It follows that

$$a_{k+1} = 11(10l + 5) - 24(10m + 5) = 10(11l - 24m - 7) + 5.$$

So $10 \mid a_{k+1} - 5$, in other words $a_{k+1} \equiv 5 \pmod{10}$.

(c) When b is a positive integer and b is written as $b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0$ in the decimal system (so b has $m+1$ digits and $b_m \neq 0$ and $b_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ for all i with $0 \leq i \leq m$), then $b = b_m 10^m + b_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + b_1 10^1 + b_0$, so $b \equiv b_0 \pmod{10}$. We know from (b) that a_{2019} is a positive integer and that $a_{2019} \equiv 5 \pmod{10}$. So the last digit of a_{2019} is congruent with $5 \pmod{10}$, so the last digit is 5.

Exercise 4 (new sheet of paper)

Assume that the two functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are differentiable in the point $x = a$ with derivatives $f'(a)$ and $g'(a)$, respectively. Define the function h as the sum of the functions f and g. In other words, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is defined by $h(x) = f(x) + g(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$.

(a). (*1 point*) Give the definition of differentiability of f in $x = a$ in terms of a limit.

(b). (*2 points*) Give the definition of differentiability of f in $x = a$ in terms of ε and δ.

(c). (*7 points*) Prove, using the ε - δ definitions of differentiability, that the function h is differentiable in the point $x = a$ and show that the derivative in the point $x = a$ is given by $h'(a) = f'(a) + g'(a)$. You are not allowed to use the standard properties of limits in this exercise.

Exercise 5 (new sheet of paper)

In this exercise we use $\mathbb{R}^2$ to denote the Cartesian product $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. We define the relation R on $\mathbb{R}^2$ by

$$(a, b)\, R\, (c, d) \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 - c^2 = d - b.$$

(a). (*4 points*) Prove that R is an equivalence relation.

For every $h \in \mathbb{R}$ we define the set $A_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y = h\}$.

(b). (*3 points*) Prove that the collection $\{A_h\}_{h \in \mathbb{R}}$ is a partition of $\mathbb{R}^2$.

(c). (*3 points*) For all $h \in \mathbb{R}$, prove that

$$A_h = \big[(0, h)\big]\ ,$$

in which $\big[(0, h)\big]$ denotes the equivalence class of $(0, h)$ with respect to the relation R.

Exercise 6 (new sheet of paper)

In this exercise, A and B are subsets of an uncountable set U.

(a). (*4 points*) Prove that $A \cup B$ is countable if A and B are countable and their intersection $A \cap B$ is empty.

(b). (*3 points*) Prove:

$$A \text{ is countable} \implies U - A \text{ is uncountable.}$$

(c). (*3 points*) Prove or disprove:

$$B \text{ is uncountable} \implies U - B \text{ is countable.}$$