Tentamen Bewijzen in de Wiskunde (WISB102)
Donderdag 5 november 2020, 13:30 - 16:30

Docenten: *Fabian Ziltener & Guido Terra-Bleeker & Lennart Meier & Martin Bootsma & Thijs Ruijgrok*

---

achternaam: ______________________ voornaam: ______________________

studentnummer: ____

Leg je **studentenkaart** hier neer. →

Als je maar een elektronische studentenkaart hebt, voeg deze dan na dit voorblad als een aparte pagina toe. Een screenshot voldoet ook.

Het cursusboek van Chartrand, Polimeni en Zhang mag worden gebruikt. Verder is het toegestaan om eigen handgeschreven aantekeningen te gebruiken. Andere hulpmiddelen alsmede het communiceren met andere personen behalve de docenten voor het vak Bewijzen in de Wiskunde zijn niet toegestaan.

Verklaring:

Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen bij dit tentamen zelf heb gemaakt zonder hulp van andere personen en zonder gebruik van andere hulpmiddelen behalve degenen die zijn toegestaan.

datum:

achternaam en voornaam:

handtekening:

32 punten zijn voldoende voor een cijfer 5.5.

1	2	3	4	5	6	$\sum$
/8	/8	/12	/10	/14	/17	/69

Voor aanwijzingen z.o.z.

Aanwijzingen:

- Dit tentamen bevat een NEDERLANDSE en een ENGELSE VERSIE.
  De Engelse versie staat na de Nederlandse versie.
- Het tentamen bestaat uit zes opgaven.
- Gebruik een apart vel voor iedere opgave.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs al je beweringen.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.
- Schrijf met een blauwe of zwarte pen, **niet** met een groene of rode pen, noch met een potlood.
- Als je je telefoon gebruikt om foto's van je uitwerkingen te maken, gebruik dan indien mogelijk een scan-app zoals CamScanner. (Hierdoor zijn je uitwerkingen makkelijker te lezen.)
- Druk het voorblad af, vul de gevraagde gegevens in, teken de verklaring en maak een foto of scan van het voorblad.
- Schrijf niet te dicht bij de rand van een vel. (Soms worden de randen van een blad niet gescand of zijn de randen slecht leesbaar.)
- Maak één pdf-bestand van het ingevulde voorblad, je collegekaart en je uitwerkingen.
- Gebruik voor de bestandsnaam het format

  `Achternaam_Voornaam_studentnummer_TentamenBidW.pdf`, bijvoorbeeld:

  `VriesDe_Peter_1234567_TentamenBidW.pdf`.
- Ga naar blackboard/ 2020-2021 1 Bewijzen in de Wiskunde (WISB102)/ Assignments.
- Als je geen recht hebt op extra tijd klik dan op:
  tentamen over Bewijzen in de Wiskunde, 5 november 2020
- Als je recht hebt op extra tijd klik dan op:
  extra tijd, tentamen over Bewijzen in de Wiskunde, 5 november 2020
- Upload onder Attach Files je bestand.
- Druk op submit.
- Je hebt 40 minuten de tijd om je uitwerkingen na afloop van het tentamen in te leveren.

Succes!

We duiden met $\mathbb{Z}$ de verzameling van de gehele getallen, met $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ de verzameling van de natuurlijke getallen zonder 0 en voor $n \in \mathbb{N}$ met $\mathbb{Z}_n$ de verzameling van restklassen modulo n aan.

Opgave 1 (8 pt, ontkenning van bewering)

Beschouw de volgende twee beweringen:

$$A\colon \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\colon \forall m \in \mathbb{N}\colon \exists n \in \mathbb{N}\colon\; k + m + n \text{ is oneven,}$$

$$B\colon \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\colon \exists n \in \mathbb{N}\colon \forall m \in \mathbb{N}\colon\; k + m + n \text{ is oneven.}$$

(a). **(2 pt)** Herformuleer de ontkenning van bewering A zodanig dat er geen expliciete ontkenning meer in voorkomt.

(b). **(2 pt)** Herformuleer de ontkenning van bewering B zodanig dat er geen expliciete ontkenning meer in voorkomt.

(c). **(2 pt)** Bewijs of ontkracht bewering A.

(d). **(2 pt)** Bewijs of ontkracht bewering B.

Opgave 2 (8 pt, natuurlijke getallen, pariteit)

(a). **(3 pt)** Laat a een geheel getal zijn zó, dat $9a + 3$ even is. Bewijs dat a oneven is.

(b). **(5 pt)** Bewijs dat er geen natuurlijke getallen a en b ongelijk aan 0 zijn met $a^2 - b^2 = 1$.

Opgave 3 (12 pt, doorsnede en vereniging van intervallen)

Voor elke $n \in \mathbb{N}$ definiëren we de verzameling

$$A_n = \left[\tfrac{n}{n+1}, n\right].$$

(a). **(7 pt)** Wat is de doorsnede $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$?

(b). **(5 pt)** Wat is de vereniging $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$?

Opmerking: Denk eraan om al je beweringen te bewijzen.

Z.O.Z.

Opgave 4 (10 pt, verzameling van restklassen modulo een getal, bijectiviteit)

Zij $n \in \mathbb{N}$, met $n \geq 2$ en $a \in \mathbb{Z}$.

(a). **(4 pt)** Definieer de functie $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ door het functievoorschrift

$$f([x]) = [x + a]\,.$$

Bewijs dat f bijectief is.

Opmerking: In de bovenstaande definitie hangt de rechterkant niet af van de keuze van de representant x van $[x]$. Dit betekent dat f goed gedefinieerd is. Je hoeft dit niet te bewijzen.

(b). **(6 pt)** Definieer de functie $g : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ door het functievoorschrift

$$g([x]) = [ax]\,.$$

Neem aan dat n een priemgetal is en $[a] \neq [0]$. Bewijs dat g bijectief is.

Opmerkingen: In de bovenstaande definitie hangt de rechterkant niet af van de keuze van de representant x van $[x]$. Dit betekent dat g goed gedefinieerd is. Je hoeft dit niet te bewijzen.

Je mag zonder bewijs gebruik maken van het volgende lemma: Zij k en m gehele getallen en n een priemgetal dat km deelt. Dan deelt n het getal k of het getal m.

Denk eraan om duidelijk te verwijzen als je voor deze opgave een stelling uit het boek gebruikt.

Opgave 5 (14 pt, continuïteit, convergentie van een rij)

Opmerking: Je mag in de bewijzen voor deze opgave **geen** rekenregels voor limieten gebruiken.

(a). **(6 pt)** Geef een ε-δ-bewijs dat de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door $f(x) = x^3$, continu is in het punt 1.

(b). **(8 pt)** Geef een ε-N-bewijs dat de rij

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

naar $\frac{3}{2}$ convergeert.

Opmerking: Als je hiervoor een formule voor $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$ als een functie van n gebruikt, dan moet je haar bewijzen.

Z.O.Z.

Opgave 6 (17 pt, kardinaliteit van het vlak $\mathbb{R}^2$)

Voor elke verzameling S definiëren we

$$S^2 = S \times S.$$

(a). **(5 pt)** Zij S en T verzamelingen met dezelfde kardinaliteit. Bewijs dat S^2 en T^2 dezelfde kardinaliteit hebben.

Definieer de functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ door $f(n) = 2n$ en $g(n) = 2n - 1$. Definieer de functies $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ en $G : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ door

$$F(A) = \{f(n) : n \in A\}, \quad G(A) = \{g(n) : n \in A\}.$$

Je mag zonder bewijs gebruiken dat de functies f, g, F en G injectief zijn.

(b). **(2 pt)** Bepaal $F(\{1, 2, 3\})$ en G({1,2,3}).

(c). **(8 pt)** Bewijs dat de functie $h : \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gegeven door $h(A, B) = F(A) \cup G(B)$ een bijectie is.

(d). **(2 pt)** Bewijs dat $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$. Je mag hierbij zonder bewijs gebruiken dat $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$.

EINDE TENTAMEN - ENGELSE VERTALING OP VOLGENDE PAGINA'S

We denote by $\mathbb{Z}$ the set of integers, by $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ the set of natural numbers without 0, and for $n \in \mathbb{N}$ by $\mathbb{Z}_n$ the set of residue classes modulo n.

Exercise 1 (8 pt, negation of a statement)

Consider the following two statements:

$$A\colon \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\colon \forall m \in \mathbb{N}\colon \exists n \in \mathbb{N}\colon \ k + m + n \text{ is odd},$$

$$B\colon \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\colon \exists n \in \mathbb{N}\colon \forall m \in \mathbb{N}\colon \ k + m + n \text{ is odd}.$$

(a). **(2 pt)** Reformulate the negation of statement A, so that it does not contain an explicit negation any more.

(b). **(2 pt)** Reformulate the negation of statement B, so that it does not contain an explicit negation any more.

(c). **(2 pt)** Prove or disprove statement A.

(d). **(2 pt)** Prove or disprove statement B.

Exercise 2 (8 pt, natural numbers, parity)

(a). **(3 pt)** Let a be an integer, such that $9a + 3$ is even. Show that a is odd.

(b). **(5 pt)** Show that there are no nonzero natural numbers a and b such that $a^2 - b^2 = 1$.

Exercise 3 (12 pt, intersection and union of intervals)

For every $n \in \mathbb{N}$ we define the set

$$A_n = \left[\tfrac{n}{n+1}, n\right].$$

(a). **(7 pt)** Determine the intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

(b). **(5 pt)** Determine the union $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Remark: Remember to prove all your statements.

More exercises on the next page.

Exercise 4 (10 pt, set of residue classes modulo some integer, bijectivity)

Let $n \in \mathbb{N}$, with $n \geq 2$, and let $a \in \mathbb{Z}$.

(a). **(4 pt)** We define the function $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ by

$$f([x]) = [x + a] .$$

Prove that f is bijective.

Remark: The right hand side in the above definition does not depend on the choice of the representative x of $[x]$. This means that f is well-defined. You do not need to prove this.

(b). **(6 pt)** We define the function $g : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ by

$$g([x]) = [ax] .$$

Assume that n is a prime number and $[a] \neq [0]$. Prove that g is bijective.

Remarks: The right hand side in the above definition does not depend on the choice of the representative x of $[x]$. This means that g is well-defined. You do not need to prove this.

You may use the following lemma without proof: Let k and m be integers and n a prime number that divides km. Then n divides k or m.

If you use a theorem from the book then remember to clearly refer to it.

Exercise 5 (14 pt, continuity, convergence of a sequence)

Remark: In the proofs for this exercise you may **not** use any result about limits.

(a). **(6 pt)** Give an ε-δ-proof that the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, defined by $f(x) = x^3$, is continuous at the point 1.

(b). **(8 pt)** Give an ε-N-proof that the sequence

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

converges to $\frac{3}{2}$.

Remark: If you use a formula for $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$ as a function of n, then you need to prove it.

Another exercise on the next page.

Exercise 6 (17 pt, cardinality of the plane $\mathbb{R}^2$)

For every set S we define

$$S^2 = S \times S.$$

(a). **(5 pt)** Let S and T be sets of the same cardinality. Prove that S^2 and T^2 have the same cardinality.

Definine the functions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ and $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ by $f(n) = 2n$ and $g(n) = 2n - 1$. Define the functions $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ and $G : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ by

$$F(A) = \{f(n) : n \in A\}, \quad G(A) = \{g(n) : n \in A\}.$$

You may use without a proof that the functions f, g, F and G are one-to-one.

(b). **(2 pt)** Determine $F(\{1, 2, 3\})$ en G({1,2,3}).

(c). **(8 pt)** Prove that the function $h : \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ given by $h(A, B) = F(A) \cup G(B)$ is a bijection.

(d). **(2 pt)** Prove that $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$. You may use without proof that $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$.