Tentamen Bewijzen in de Wiskunde (WISB102)
Donderdag 5 november 2020, 13:30 - 16:30
Oplossingen

Docenten: *Fabian Ziltener & Guido Terra-Bleeker & Lennart Meier & Martin Bootsma & Thijs Ruijgrok*

Opgave 1 (8 pt, ontkenning van bewering)

(a). **[2 pt]** De ontkenning van bewering A luidt:

$$
\begin{aligned}
&\sim(\forall k \in \mathbb{Z}\colon \quad \forall m \in \mathbb{N}\colon \quad \exists n \in \mathbb{N}\colon \quad k+m+n \text{ is oneven}) \equiv \\
\equiv\ &\exists k \in \mathbb{Z}\colon \sim(\forall m \in \mathbb{N}\colon \quad \exists n \in \mathbb{N}\colon \quad k+m+n \text{ is oneven}) \equiv \\
\equiv\ &\exists k \in \mathbb{Z}\colon \quad \exists m \in \mathbb{N}\colon \sim(\exists n \in \mathbb{N}\colon \quad k+m+n \text{ is oneven}) \equiv \\
\equiv\ &\exists k \in \mathbb{Z}\colon \quad \exists m \in \mathbb{N}\colon \quad \forall n \in \mathbb{N}\colon \sim(k+m+n \text{ is oneven}) \equiv \\
\equiv\ &\exists k \in \mathbb{Z}\colon \quad \exists m \in \mathbb{N}\colon \quad \forall n \in \mathbb{N}\colon \quad k+m+n \text{ is even}
\end{aligned}
$$

(b). **[2 pt]** De ontkenning van bewering B luidt:

$$
\begin{aligned}
&\sim(\forall k \in \mathbb{Z}\colon \quad \exists n \in \mathbb{N}\colon \quad \forall m \in \mathbb{N}\colon \quad k+m+n \text{ is oneven}) \equiv \\
\equiv\ &\exists k \in \mathbb{Z}\colon \sim(\exists n \in \mathbb{N}\colon \quad \forall m \in \mathbb{N}\colon \quad k+m+n \text{ is oneven}) \equiv \\
\equiv\ &\exists k \in \mathbb{Z}\colon \quad \forall n \in \mathbb{N}\colon \sim(\forall m \in \mathbb{N}\colon \quad k+m+n \text{ is oneven}) \equiv \\
\equiv\ &\exists k \in \mathbb{Z}\colon \quad \forall n \in \mathbb{N}\colon \quad \exists m \in \mathbb{N}\colon \sim(k+m+n \text{ is oneven}) \equiv \\
\equiv\ &\exists k \in \mathbb{Z}\colon \quad \forall n \in \mathbb{N}\colon \quad \exists m \in \mathbb{N}\colon \quad k+m+n \text{ is even}
\end{aligned}
$$

(c). **[2 pt]** Bewering A is waar. Immers, voor elke willekeurige $k \in \mathbb{Z}$ en $m \in \mathbb{N}$ is $k+m$ hetzij even, hetzij oneven. Als $k+m$ even is dan kies je bijvoorbeeld $n = 1 \in \mathbb{N}$, waarvoor dan geldt dat $k+m+n = k+m+1$ oneven is. Als $k+m$ oneven is dan kies je bijvoorbeeld $n = 2 \in \mathbb{N}$, waarvoor dan geldt dat $k+m+n = k+m+2$ oneven is.

(d). **[2 pt]** Bewering B is onwaar. De ontkenning $\exists k \in \mathbb{Z}\colon \forall n \in \mathbb{N}\colon \exists m \in \mathbb{N}\colon\ k+m+n$ is even, is namelijk juist wél waar. Kies bijvoorbeeld $k = 0 \in \mathbb{Z}$. Dan geldt voor elke even $n \in \mathbb{N}$ dat $k+m+n = 0+2+n = n+2$ ook even is, voor $m = 2 \in \mathbb{N}$, terwijl voor alle oneven $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $k+m+n = 0+1+n = n+1$ weer even is, voor $m = 1 \in \mathbb{N}$.

Opgave 2 (8 pt, natuurlijke getallen, pariteit)

(a). **[3 pt]** We bewijzen het contrapositief: Als a even is, dan is $9a+3$ oneven. Inderdaad, als a even is, schrijf $a = 2k$ voor een $k \in \mathbb{Z}$. Dan hebben we

$$\begin{aligned} 9a+3 &= 18k+3 \\ &= 2(9k+1)+1, \end{aligned}$$

wat oneven is.

(b). **[5 pt]** Stel dat $a, b \in \mathbb{N}$ met $a^2 - b^2 = 1$. We hebben dan $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 = 1$. Omdat $a, b \geq 1$, hebben we $a + b \geq 2$. Als $a - b \leq 0$ is, moet daarom $(a-b)(a+b) < 0$ zijn, in tegenspraak met het feit dat 1 positief is. We zien dat $a - b > 0$. Omdat $a - b \in \mathbb{Z}$, moet ook $a - b \geq 1$ waar zijn. Daarom $(a-b)(a+b) \geq 1 \cdot 2 > 1$, in tegenspraak met $(a-b)(a+b) = 1$.

Alternatief: We zien dat $a > b$ (anders hebben we $a^2 \leq b^2$ en dus $a^2 - b^2 \leq 0$.) Schrijf $a = b + k$ met $k \in \mathbb{N}$. Dan

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= b^2 + 2bk + k^2 \\ &= 2bk + k^2 \\ &\geq 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1^2 \\ &= 3, \end{aligned}$$

in tegenspraak met $a^2 - b^2 = 1$.

Opgave 3 (12 pt, doorsnede en vereniging van intervallen)

(a). **[7 pt]** **Claim:** De doorsnede van de collectie van verzamelingen wordt gegeven door

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{1\}.$$

Bewijs: Allereerst bewijzen we dat $\{1\} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$:
Zij $x \in \{1\}$, oftewel $x = 1$. Voor elke $n \in \mathbb{N}$ is $n + 1 > n \geq 1 > 0$ en dus is $\frac{n}{n+1} < 1 \leq n$. Dus $x = 1 \in \left[\frac{n}{n+1}, n\right] = A_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Oftewel, $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Vervolgens bewijzen we dat $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq \{1\}$:
Zij $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Dan is $x \in A_n = \left[\frac{n}{n+1}, n\right]$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Oftewel, $\frac{n}{n+1} \leq x \leq n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. In het bijzonder zien we voor $n = 1$ dat $x \leq 1$. We gaan nu nog laten zien dat het niet mogelijk is dat $x < 1$.
Stel namelijk dat het wel waar zou zijn dat $x < 1$. Dan is $1 - x > 0$. Bovendien weten we dat $x \in A_1 = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, dus $x \geq \frac{1}{2} > 0$. Dat betekent dat $\frac{x}{1-x} > 0$ en dus dat $n = \left\lceil \frac{x}{1-x} \right\rceil + 1 \in \mathbb{N}$. Voor deze $n \in \mathbb{N}$ geldt echter dat $n > \frac{x}{1-x}$, en dus dat $x < \frac{n}{n+1}$ in tegenspraak met het feit dat $\frac{n}{n+1} \leq x$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
We weten nu dus dat $x \leq 1$ en dat het niet mogelijk is dat $x < 1$, dus $x = 1$ en $x \in \{1\}$.

(b). **[5 pt]** **Claim:** De vereniging van de collectie van verzamelingen wordt gegeven door

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left[\tfrac{1}{2}, \infty\right).$$

Bewijs: Allereerst bewijzen we dat $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$:

Zij $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Dan is er een $n \in \mathbb{N}$ waarvoor $x \in A_n = \left[\frac{n}{n+1}, n\right]$. Dat wil zeggen dat $\frac{n}{n+1} \leq x \leq n$ voor deze $n \in \mathbb{N}$. Omdat $n \geq 1$ is ook $2n = n + n \geq n + 1$ en dus is $x \geq \frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}$. Hieruit concluderen we dat $x \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Tenslotte bewijzen we dat $\left[\frac{1}{2}, \infty\right) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$:
Zij $x \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$. Dat wil zeggen dat $x \geq \frac{1}{2}$. We onderscheiden nu twee gevallen: $x \leq 1$ of $x > 1$. In het eerste geval is $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, dus $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] = A_1$. In het tweede geval beschouwen we $n = \lceil x \rceil \in \mathbb{N}$. Daarvoor geldt dat $x \leq n$ en ook dat $\frac{n}{n+1} \leq 1 < x$, en dus dat $x \in \left[\frac{n}{n+1}, n\right] = A_n$. In beide gevallen is er dus (minstens) een $n \in \mathbb{N}$ waarvoor $x \in A_n$. Met andere woorden, $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Opgave 4 (10 pt, verzameling van restklassen modulo een getal, bijectiviteit)

(a). **[4 pt]** f is injectief: Zij $x, y \in \mathbb{Z}$ zó, dat $f([x]) = f([y])$. Dan geldt er dat

$$[x + a] = f([x]) = f([y]) = [y + a],$$

dus $x + a \equiv y + a$ modulo n. Dus n deelt $y + a - (x + a) = y - x$. Daarom geldt dat $[x] = [y]$. Hieruit volgt dat f injectief is.

f is surjectief: Zij $y \in \mathbb{Z}$. We definiëren $x := y - a$. Er geldt dat $f([x]) = \left[y - a + a\right] = [y]$. Hieruit dat f surjectief is.

(b). **[6 pt]** g is injectief: Zij $x, y \in \mathbb{Z}$ zó, dat $g([x]) = g([y])$. Dan geldt er dat

$$[ax] = g([x]) = g([y]) = [ay],$$

dus $ax \equiv ay$ modulo n. Dus n deelt $ax - ay = a(x - y)$. Vanwege het lemma volgt hieruit dat n het getal a of het getal $x - y$ deelt. Vanwege onze veronderstelling dat $[a] \neq [0]$, deelt n het getal a niet. Dus n deelt $x - y$. Dus we hebben $[x] = [y]$. Hieruit volgt dat g injectief is.

Het domein en de bereik van de afbeelding g zijn gelijk aan dezelfde eindige verzameling $\mathbb{Z}_n$. Omdat g injectief is, volgt daarom uit een stelling in het boek dat g surjectief is.

Opgave 5 (14 pt, continuïteit, convergentie van een rij)

(a). **[6 pt]** Zij $\varepsilon > 0$.

$$\delta := \min\left\{\frac{\varepsilon}{7}, 1\right\}$$

Zij $x \in \mathbb{R}$: $|x - 1| \leq \delta$.

Dan $x \in [0,2]$,

$$\begin{aligned}
\big|f(x) - f(1)\big| &= |x^3 - 1| \\
&\big|(x-1)\big(x^2+x+1\big)\big| \\
&= |x-1|\big|x^2+x+1\big| \\
&\leq \delta \cdot 7 \qquad \text{(omdat } x \in [0,2]\text{)} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dus f is continu in het punt 1.

(b). **[8 pt]**

$$a_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$$

We hebben

$$a_0 = 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^0}.$$

Er geldt

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad a_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n} \Longrightarrow a_{n+1} &= a_n + \frac{1}{3^{n+1}} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n+1}}.
\end{aligned}$$

$$\text{inductie} \quad \Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \, a_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n}$$

Zij $\varepsilon > 0$.

We kiezen een positief geheel getal

$$N \geq \log_{\frac{1}{3}}(\varepsilon).$$

Zij $n \geq N$ een geheel getal. Dan

$$\begin{aligned}
\left|a_n - \frac{3}{2}\right| &= \frac{1}{2 \cdot 3^n} \\
&\leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^N \\
&\leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(\varepsilon)} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dus a_n, $n = 0, 1, \ldots$, convergeert naar $\frac{3}{2}$.

Opgave 6 (17 pt, kardinaliteit van het vlak $\mathbb{R}^2$)

(a). **[5 pt]** We weten dat $|S| = |T|$. Volgens de definitie van cardinaliteit bestaat er dus een bijectieve functie $f : S \to T$. Definieer de functie $g : S \times S \to T \times T$ door $g(s, s') = (f(s), f(s'))$. We willen bewijzen dat deze functie bijectief is, want dan volgt uit de definitie van cardinaliteit dat $|S^2| = |T^2|$.

Stel $g(s, s') = g(\widetilde{s}, \widetilde{s}')$ voor zekere $s, s', \widetilde{s}, \widetilde{s}' \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Dan geldt dat $(f(s), f(s')) = (f(\widetilde{s}), f(\widetilde{s}'))$ en dus $f(s) = f(\widetilde{s})$ en $f(s') = f(\widetilde{s}')$. Omdat de functie f injectief is geldt $s = \widetilde{s}$ en $s' = \widetilde{s}'$, dus de functie g is injectief.

We tonen de surjectiviteit van de functie g aan. Zij $(t, t') \in T^2$. Omdat de functie f surjectief is zijn er punten s en $s' \in S$ zodanig dat $f(s) = t$ en $f(s') = t'$. Dus geldt $g(s, s') = \big(f(s), f(s')\big) = (t, t')$. Dus de functie g is surjectief.

(b). **[2 pt]** $F(\{1, 2, 3\}) = \{f(1), f(2), f(3)\} = \{2, 4, 6\}$.
$G(\{1, 2, 3\}) = \{g(1), g(2), g(3)\} = \{1, 3, 5\}$.

(c). **[8 pt]** Zij $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Merk op dat $F(X) \subseteq \{2k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq [0]$ en $F(Y) \subseteq \{2k - 1 : k \in \mathbb{N}\} \subseteq [1]$ met $[0]$ en $[1]$ de congruentieklassen van modulo 2. Omdat $[0] \cap [1] = \emptyset$ geldt $F(X) \cap G(Y) = \emptyset$.
Voor de injectiviteit van h: Stel $h(A, B) = h(C, D)$. Dan geldt: $F(A) \cup G(B) = F(C) \cup G(D)$. Stel $n \in F(A)$, dan geldt $n \in F(A) \cup G(B)$. Tevens geldt $n \notin G(D)$ (want $F(A) \cap G(D) = \emptyset$) en dus $n \in F(C)$. Omgekeerd geldt: Stel $n \in F(C)$, dan geldt $n \in F(C) \cup G(D)$ en omdat $n \notin G(B)$ geldt dat $n \in F(A)$, dus $F(A) = F(C)$.

Op vergelijkbare wijze volgt $G(B) = G(D)$. Omdat F en G injectief zijn, geldt $A = C$ en $B = D$, dus de functie h is injectief.

Voor de surjectiviteit van h: Zij $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, dan geldt $X \subseteq \mathbb{N}$. Kies $A = \{k \in \mathbb{N} : 2k \in X\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ en $B = \{k \in \mathbb{N} : 2k + 1 \in X\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Dan geldt $h(A, B) = X$ en dus is de functie h surjectief.

(d). **[2 pt]** Omdat er een bijectie is van $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ geldt $|\mathcal{P}(\mathbb{N})^2| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Wegens onderdeel (a) geldt $|\mathbb{R}^2| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})^2|$ en dus geldt

$$\begin{aligned} |\mathbb{R}^2| &= |\mathcal{P}(\mathbb{N})^2| \\ &= |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \\ &= |\mathbb{R}|. \end{aligned}$$