Hertentamen Bewijzen in de Wiskunde (WISB102)
donderdag, 7 januari 2021, 13:30 - 16:30

Docenten: *Fabian Ziltener & Guido Terra-Bleeker & Lennart Meier & Martin Bootsma & Thijs Ruijgrok*

---

achternaam: ____________________ voornaam: ____________________

studentnummer: ____

Leg je **studentenkaart** hier neer. $\rightarrow$

Als je maar een elektronische studentenkaart hebt, voeg deze dan na dit voorblad als een aparte pagina toe. Een screenshot voldoet ook.

Het cursusboek van Chartrand, Polimeni en Zhang mag worden gebruikt. Verder is het toegestaan om eigen handgeschreven aantekeningen te gebruiken. Andere hulpmiddelen alsmede het communiceren met andere personen behalve de docenten voor het vak Bewijzen in de Wiskunde zijn niet toegestaan.

Verklaring:

Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen bij dit tentamen zelf heb gemaakt zonder hulp van andere personen en zonder gebruik van andere hulpmiddelen behalve degenen die zijn toegestaan.

datum:

achternaam en voornaam:

handtekening:

28 punten zijn voldoende voor een cijfer 5.5.

Voor aanwijzingen z.o.z.

Aanwijzingen:

- Dit tentamen bevat een NEDERLANDSE en een ENGELSE VERSIE.
  De Engelse versie staat na de Nederlandse versie.
- Het tentamen bestaat uit zes opgaven.
- Gebruik een apart vel voor iedere opgave.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs al je beweringen.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.
- Schrijf met een blauwe of zwarte pen, **niet** met een groene of rode pen, noch met een potlood.
- Als je je telefoon gebruikt om foto's van je uitwerkingen te maken, gebruik dan indien mogelijk een scan-app zoals CamScanner. (Hierdoor zijn je uitwerkingen makkelijker te lezen.)
- Druk het voorblad af, vul de gevraagde gegevens in, teken de verklaring en maak een foto of scan van het voorblad.
- Lever maar één oplossing voor elke opgave in.
- Schrijf niet te dicht bij de rand van een vel. (Soms worden de randen van een blad niet gescand of zijn de randen slecht leesbaar.)
- Maak één pdf-bestand van het ingevulde voorblad, je collegekaart en je uitwerkingen.
- Gebruik voor de bestandsnaam het format

  `Achternaam_Voornaam_studentnummer_HertentamenBidW.pdf`, bijvoorbeeld:

  `VriesDe_Peter_1234567_HertentamenBidW.pdf`.
- Ga naar blackboard/ 2020-2021 1 Bewijzen in de Wiskunde (WISB102)/ Assignments.
- Als je geen recht hebt op extra tijd klik dan op:
  hertentamen over Bewijzen in de Wiskunde, 7 januari 2021
- Als je recht hebt op extra tijd klik dan op:
  extra tijd, hertentamen over Bewijzen in de Wiskunde, 7 januari 2021
- Upload onder Attach Files je bestand.
- Druk op submit.
- Je hebt 40 minuten de tijd om je uitwerkingen na afloop van het tentamen in te leveren.

Succes!

We duiden met $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ de verzameling van de natuurlijke getallen zonder 0, met $\mathbb{Q}$ de verzameling van de rationale getallen en met $\mathbb{R}$ de verzameling van de reële getallen aan.

Opgave 1 (9 pt, ontkenning van bewering)

Beschouw de volgende twee gekwantificeerde beweringen:

$$A: \qquad \exists x \in \mathbb{R} \colon \forall y \in \mathbb{Q} \colon \; x > y,$$

$$B: \qquad \forall y \in \mathbb{Q} \colon \exists x \in \mathbb{R} \colon \; x > y.$$

(a). **(2 pt)** Herformuleer de ontkenning van bewering A zodanig dat er geen expliciete ontkenning meer in voorkomt.

(b). **(2 pt)** Herformuleer de ontkenning van bewering B zodanig dat er geen expliciete ontkenning meer in voorkomt.

(c). **(3 pt)** Bewijs of ontkracht bewering A.

(d). **(2 pt)** Bewijs of ontkracht bewering B.

Opgave 2 (10 pt, samengestelde beweringen, waarheidstabel)

Laat P, R en S drie beweringen zijn. Geef onafhankelijk van elkaar twee bewijzen dat de samengestelde beweringen $P \Rightarrow (R \wedge S)$ en $(P \Rightarrow R) \wedge (P \Rightarrow S)$ logisch equivalent zijn:

(a). **(5 pt)** met behulp van een waarheidstabel,

(b). **(5 pt)** met behulp van de rekenregels voor beweringen.

Je mag hierbij gebruikmaken van het feit dat $P \Rightarrow Q \equiv {\sim}(P \wedge {\sim}Q)$.

Opgave 3 (9 pt, pariteit en deelbaarheid van natuurlijke getallen)

(a). **(4 pt)** Laat a en b gehele getallen zijn. Bewijs dat a en b oneven zijn, als $(a^2 + 2)b^2$ oneven is.

(b). **(5 pt)** Bewijs met inductie dat $5 \mid 2^{2n-1} + 3^{2n-1}$ voor iedere $n \in \mathbb{N}$.

Z.O.Z.

Opgave 4 (8 pt, equivalentierelatie, equivalentieklasse)

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een functie van het vlak naar de reële getallen. Definieer een relatie S op $\mathbb{R}^2$ door: $(x_1, y_1)S(x_2, y_2)$ als $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$.

(a). **(4 pt)** Bewijs dat S een equivalentie relatie is.

(b). **(1 pt)** Geef een expliciete uitdrukking voor de equivalentieklasse $[(a, b)]$.

(c). **(3 pt)** Zij $f(x, y) = |x| + |y|$. Schets $[(1, 2)]$ in het (x, y) vlak.

Opgave 5 (12 pt, convergentie van een rij en van een functie in een punt)

(a). **(5 pt)** Voor elke $n \in \mathbb{N}$ definiëren we

$$a_n := \frac{1}{n^2 - n}.$$

Geef een ε-N-bewijs dat de rij $\{a_n\}$ convergeert.

(b). **(7 pt)** We definiëren de functie

$$f : \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x + 2}.$$

Geef een ε-δ-bewijs dat $f(x)$ convergeert, als x naar 1 gaat. Dit betekent dat de limiet $\lim_{x \to 1} f(x)$ bestaat.

Opmerking: Je mag in deze opgave **geen** rekenregels voor limieten gebruiken.

Opgave 6 (12 pt, kardinaliteiten van deelverzamelingen van het vlak)

Zij X de open eenheidscirkel, i.e., $X = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 < 1\}$ en Y het open eenheidsvierkant $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x| < \frac{1}{2} \text{ en } |y| < \frac{1}{2}\}$.

(a). **(6 pt)** Gebruik de stelling van Schröder-Bernstein om te laten zien dat er een bijectieve functie $f : Y \to X$ bestaat.

(b). **(6 pt)** Laat A en B deelverzamelingen van $\mathbb{R}^2$ zijn, elk met oneindig veel elementen. Bewijs of ontkracht de stelling dat hieruit volgt dat $|A| = |B|$.

EINDE TENTAMEN - ENGELSE VERTALING OP VOLGENDE PAGINA'S

We denote by $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ the set of natural numbers without 0, by $\mathbb{Q}$ the set of rational numbers, and by $\mathbb{R}$ the set of real numbers.

Exercise 1 (9 pt, negation of a statement)

Consider the following two quantified statements:

$$A\colon \qquad \exists x \in \mathbb{R}\colon \forall y \in \mathbb{Q}\colon\; x > y,$$

$$B\colon \qquad \forall y \in \mathbb{Q}\colon \exists x \in \mathbb{R}\colon\; x > y.$$

(a). **(2 pt)** Reformulate the negation of statement A such that it does not contain an explicit negation anymore.

(b). **(2 pt)** Reformulate the negation of statement B such that it does not contain an explicit negation anymore.

(c). **(3 pt)** Prove or disprove statement A.

(d). **(2 pt)** Prove or disprove statement B.

Exercise 2 (10 pt, composed statements, truth table)

Consider three statements P, R and S. Provide two independent proofs that the compound statements $P \Rightarrow (R \wedge S)$ and $(P \Rightarrow R) \wedge (P \Rightarrow S)$ are logically equivalent:

(a). **(5 pt)** by using a truth tabel,

(b). **(5 pt)** by using the fundamental laws of logical equivalence.

You may use the fact that $P \Rightarrow Q \equiv \sim(P \wedge \sim Q)$.

Exercise 3 (9 pt, parity and divisibility of natural numbers)

(a). **(4 pt)** Let a and b be integers. Show that if $(a^2 + 2)b^2$ is odd, then a and b are odd.

(b). **(5 pt)** Use induction to show that 5 divides $2^{2n-1} + 3^{2n-1}$ for every $n \in \mathbb{N}$.

More problems on the next page.

Exercise 4 (8 pt, equivalence relation, equivalence class)

Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be a function from the plane to the real numbers. Define a relation S on $\mathbb{R}^2$ by: $(x_1, y_1)S(x_2, y_2)$ if $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$.

(a). **(4 pt)** Prove that S is an equivalence relation.

(b). **(1 pt)** Give an explicit expression for the equivalence class $[(a, b)]$.

(c). **(3 pt)** Let $f(x, y) = |x| + |y|$. Draw $[(1, 2)]$ in the (x, y) plane.

Exercise 5 (12 pt, convergence of a sequence and of a function at a point)

(a). **(5 pt)** For every $n \in \mathbb{N}$ we define

$$a_n := \frac{1}{n^2 - n}.$$

Give an ε-N-proof that the sequence $\{a_n\}$ converges.

(b). **(7 pt)** We define the function

$$f : \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x + 2}.$$

Give an ε-δ-proof that $f(x)$ converges, as x approaches 1. This means that the limit $\lim_{x \to 1} f(x)$ exists.

Remark: In this exercise you may **not** use any results about limits.

Exercise 6 (12 pt, cardinalities of subsets of the plane)

Let X be the open unit circle, i.e., $X = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 < 1\}$ and Y the open unit square, i.e., $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x| < \frac{1}{2} \text{ and } |y| < \frac{1}{2}\}$.

(a). **(6 pt)** Use the theorem of Schröder-Bernstein to prove that there exist a bijection $f : Y \to X$.

(b). **(6 pt)** Let A and B be subsets of $\mathbb{R}^2$, each with infinitely many elements. Prove or disprove the statement: $|A| = |B|$.