



Tentamen Bewijzen in de Wiskunde (WISB102)

Dinsdag 9 november 2021, 11:30 - 14:30

Docenten: Álvaro del Pino Gomez, Guido Terra-Bleeker, Jeroen Maes, Mikhail Hlushchanka, Fabian Ziltener, Marieke van der Wegen

Boeken, cursusmateriaal en rekenmachines mogen niet gebruikt worden, maar het is toegestaan om één vel aantekeningen te gebruiken die je zelf met de hand geschreven hebt (A4-formaat, voor- en achterkant). Andere hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

26 punten zijn voldoende voor een cijfer 5.5.

Aanwijzingen:

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Gebruik een apart vel voor iedere opgave.
- Zet je mobiele telefoon uit en leg hem in je tas.
- Leg je studentenkaart op tafel.
- Dit tentamen bevat een NEDERLANDSE en een ENGELSE VERSIE.
De Engelse versie staat na de Nederlandse versie.
- Het tentamen bestaat uit zeven opgaven.
- Tenzij anders aangegeven, mag je elke uitspraak gebruiken die in het cursusboek is bewezen, zonder haar opnieuw te bewijzen, behalve als de uitspraak (deel van) een opgave in het cursusboek is. Geef het aan als je een resultaat uit het boek gebruikt.
- Bewijs elke andere uitspraak die je doet. Rechtvaardig je berekeningen. Ga na dat aan de voorwaarden van de stellingen die je gebruikt is voldaan.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.
- Schrijf met een blauwe of zwarte pen, **niet** met een groene of rode pen, noch met een potlood.

Succes!

1	2	3	4	5	6	7	Σ
/8	/3	/12	/6	/8	/8	/10	/55

Opgave 4 (6 pt, negatie van een uitspraak)

- (a). (3 pt) Herformuleer de ontkenning van de bewering

$$\forall C \in \mathbb{R}: \exists \delta > 0: \forall x \in \mathbb{R}: |x| \leq \delta \Rightarrow \sin(x) > C \quad (1)$$

zodanig dat er geen expliciete ontkenning meer in voorkomt.

Opmerking: Laat de tussenstappen die je maakt zien.

- (b). (3 pt) Is de bewering (1) waar?

Opmerking: Je mag hier eigenschappen van de sinusfunctie gebruiken zonder deze te bewijzen.

Opgave 5 (8 pt, macht versus faculteit, Fibonacci-getallen)

- (a). (4 pt) We definiëren $1! := 1$ en recursief voor $k \in \mathbb{N}$, $(k+1)! := (k+1)k!$. Bewijs dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ de volgende ongelijkheid geldt:

$$n^n \geq n!$$

- (b). (4 pt) We definiëren de Fibonacci getallen door $F_1 := 1$, $F_2 := 1$ en recursief voor $k \in \mathbb{N}$, door $F_{k+2} := F_k + F_{k+1}$. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

Opgave 6 (8 pt, convergentie van een rij)

- (a). (4 pt) Bewijs dat voor elke $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de volgende gelijkheid geldt:

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{4^k} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n}.$$

- (b). (4 pt) Geef een ε - N -bewijs dat de rij

$$\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{4^k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

convergeert. (In het boek wordt deze rij als $\left\{ \sum_{k=0}^n \frac{1}{4^k} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ geschreven.)

Opmerking: Je mag hiervoor deel (a) van deze opgave gebruiken ook als je het niet bewezen hebt.

Z.O.Z.

