Tentamen Lineaire algebra 1 (WISB107)
Dinsdag 3 november 2020 13.30-16.30

Docent: *Barbara van den Berg*

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Het gebruik van het dictaat en collegeaantekeningen is toegestaan. Het interactieve dictaat op Blackboard mag gelezen worden, maar mag niet gebruikt worden voor communicatie tijdens het tentamen. Het gebruik van telefoons, computers, rekenmachines of andere bronnen is **NIET** toegestaan.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs je beweringen.
- Je kunt de opgaven in willekeurige volgorde maken. Ook als je antwoord niet volledig is, kun je er punten voor krijgen. Als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.
- Tijdens het tentamen is de docent beschikbaar voor dringende vragen op Teams of per mail: b.n.vandenberg@uu.nl. Indien niet beschikbaar, neem dan contact op met Leandro Chiarini Medeiros: l.chiarinimedeiros@uu.nl
- Het tentamen heeft vijf opgaven. De verdeling van de punten is als volgt:
  - opgave 1: 20 punten
  - opgave 2: 15 punten
  - opgave 3: 30 punten
  - opgave 4: 15 punten
  - opgave 5: 20 punten

Verklaring bij je uitwerking

Je tentamen is pas geldig als je bij je uitwerking naar waarheid verklaart dat je geen andere hulpbronnen hebt gebruikt dan die zijn toegestaan. Je kunt hiervoor de volgende verklaring gebruiken:

Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerking van dit tentamen zelf heb gemaakt zonder hulp van andere personen of van hulpmiddelen anders dan het dictaat, overig cursusmateriaal op de Blackboardpagina van Lineaire Algebra en eigen aantekeningen.

3 november, ... [naam] ... [handtekening].

Opgave 1

(*20 punten*) In $\mathbb{R}^3$ is de lijn l gegeven door $l = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ en de lijn m is gegeven als de snijlijn van de twee vlakken gegeven door $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$ en $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

(a). (*6 punten*) Bewijs dat de twee lijnen l en m elkaar niet snijden.

(b). (*7 punten*) Geef een parametrisatie van de lijn m.

(c). (*7 punten*) Bereken de afstand tussen l en m.

Opgave 2

(*15 punten*) Laat S en T twee eindige deelverzamelingen zijn van $\mathbb{R}^n$, met de eigenschap dat de doorsnede van S en T niet leeg is.

(a). (*5 punten*) Bewijs dat $\text{Span}(S \cap T) \subseteq \text{Span}(S) \cap \text{Span}(T)$.

(b). (*5 punten*) Geef een voorbeeld waarbij $\text{Span}(S \cap T)$ en $\text{Span}(S) \cap \text{Span}(T)$ gelijk zijn. NB: Vergeet niet om aan te tonen waarom je voorbeeld voldoet.

(c). (*5 punten*) Geef een voorbeeld waarbij $\text{Span}(S \cap T)$ en $\text{Span}(S) \cap \text{Span}(T)$ ongelijk zijn. NB: Vergeet niet om aan te tonen waarom je voorbeeld voldoet.

Opgave 3

(*30 punten*)

Laat $a \in \mathbb{R}$ gegeven zijn. Bekijk de vier vectoren in $\mathbb{R}^4$ gegeven door:

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\\0\end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix}-2\\-3\\6\\1\end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\a+3\\a\end{pmatrix}, \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix}2\\4\\-4\\a(a-1)\end{pmatrix}.$$

(a). (*12 punten*) Bepaal voor welke waarde(n) van a de vier vectoren een basis vormen voor $\mathbb{R}^4$.

(b). (*5 punten*) Laat A de matrix zijn met $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}$ in de kolommen. Wat is de rang van A als $a = 0$?

(c). (*8 punten*) Wat is de dimensie van de nulruimte van A als $a = 1$? Geef een basis voor de nulruimte als $a = 1$.

(d). (*5 punten*) Voor welke waarden van a is A inverteerbaar?

Opgave 4

(*15 punten*) Laat $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Bewijs door handig toepassen van rij- en kolomoperaties dat

$$\begin{vmatrix} a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a \\ 2a & a+b & a+b & a+b \\ 2a & a+b & a+b+c & a+b+c \\ 2a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \end{vmatrix} = abcd.$$

Opgave 5

(*20 punten*) Laat A en B $m \times n$-matrices zijn. In onderdeel (d) van deze opgave gaan we bewijzen dat

$$\text{rang}(A+B) \leq \text{rang}(A) + \text{rang}(B).$$

(a). (*5 punten*) Geef een voorbeeld van twee 2×2 matrices A en B die ongelijk zijn aan de nulmatrix en zodat

$$\text{rang}(A+B) = \text{rang}(A) + \text{rang}(B).$$

NB: Vergeet niet om aan te tonen waarom je voorbeeld voldoet.

(b). (*5 punten*) Stel dat A en B twee inverteerbare $n \times n$ matrices zijn. Waarom geldt dan

$$\text{rang}(A+B) < \text{rang}(A) + \text{rang}(B)?$$

Neem nu aan dat A en B $m \times n$-matrices zijn.

(c). (*5 punten*) Noem $U = \text{Span(kolommen van A)}$ en $V = \text{Span(kolommen van B)}$. Bewijs dat

$$\text{Span(kolommen van A+B)} \subseteq U + V$$

.

(d). (*5 punten*) Bewijs dat

$$\text{rang}(A+B) \leq \text{rang}(A) + \text{rang}(B).$$

Uitwerkingen

Opgave 1

(a) Als de lijnen elkaar wel snijden, dan is er een $\lambda \in \mathbb{R}$ zodat het punt $(1+2\lambda, \lambda, 1)^t$ voldoet aan beide vergelijklingen voor m. Invullen in de eerste vergelijking geeft $4\lambda - 1 = 0$ dus $\lambda = \frac{1}{4}$. Invullen in de tweede vergelijking geeft $3\lambda + 3 = 0$ dus $\lambda = -1$. Dit is een tegenspraak, dus de lijnen snijden niet.

Alternatieve uitwerking. Het is ook mogelijk om eerst opgave (b) te doen en de gevonden parametervoorstelling van m te gebruiken. In dat geval willen we laten zien dat er geen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ bestaan met $(1 + 2\lambda, \lambda, 1)^t = (0, \mu, \mu)^t$, oftewel dat het stelsel

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda & = 0 \\ \lambda & = \mu \\ 1 & = \mu \end{cases}$$

strijdig is. De tweede en derde vergelijking geven $\lambda = \mu = 1$, maar de eerste geeft $\lambda = -\frac{1}{2}$, opnieuw een tegenspraak.

(b) We elimineren de variabele x_1, bijvoorbeeld door de eerste vergelijking twee maal van de eerste af te halen. Dit geeft $-5x_2 + 5x_3 = 0$, oftewel $x_2 = x_3$. Dit terug invullen in de eerste vergelijking geeft $x_1 = 0$. De punten op m zijn dus van de vorm $(0, x_2, x_2)^t$, dus een mogelijke parametervoorstelling is $\mu \cdot (0, 1, 1)^t$, met $\mu \in \mathbb{R}$. (Een steunvector is niet nodig (want m gaat door de oorsprong) en mag dus weggelaten worden.)

Alternatieve uitwerking. De lijn m gaat duidelijk door de oorsprong $(0, 0, 0)^t$, dus het volstaat om een richtingsvector van m te bepalen. De lijn m wordt gegeven door twee vlakken, met normaalvectoren $(1, 2, -2)^t$ en $(2, -1, 1)^t$. De richting van m staat loodrecht op deze beide normaalvectoren, en kan dus bepaald worden d.m.v. het uitproduct $(1, 2, -2)^t \times (2, -1, 1)^t = (0, -5, -5)^t$. We zien opnieuw dat $(0, 1, 1)^t$ een richtingsvector voor m is.

(c) De meest handige methode is die uit Voorbeeld 2.4.4. We zoeken $P = (1 + 2\lambda, \lambda, 1)^t$ op l en $Q = (0, \mu, \mu)^t$ op m zodat $\overrightarrow{PQ} = (-1 - 2\lambda, \mu - \lambda, \mu - 1)^t$ loodrecht op zowel l als m staat. Loodrecht op l betekent dat $\overrightarrow{PQ} \cdot (2, 1, 0)^t = 0$, en uitgewerkt geeft dit $\mu - 5\lambda - 2 = 0$. Loodrecht op m be-tekent dat $\overrightarrow{PQ} \cdot (0, 1, 1)^t = 0$, en uitgewerkt geeft dit $2\mu - \lambda - 1 = 0$. We hebben nu dus een stelsel van twee vergelijkingen in twee onbekenden, en oplossen geeft $\lambda = -\frac{1}{3}$, dus $P = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1)^t$, en $\mu = \frac{1}{3}$, dus $Q = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})^t$. De afstand tussen l en m is nu de afstand tussen P en Q, en dit is $\sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2} = \sqrt{\frac{1+4+4}{9}} = 1$.

Alternatieve uitwerking. Neem weer P en Q als in de eerste uitwerking. De vector $(1, -2, 2)^t$ staat loodrecht op zowel l als m. (Deze vector kan worden bepaald door het stelsel $2n_1 + n_2 = 0$ en $n_2 + n_3 = 0$ op te lossen, of door het uitproduct van $(2, 1, 0)^t$ en $(0, 1, 1)^t$ te nemen.) Nu geldt dat $\overrightarrow{PQ}$ een veelvoud is van $(1, -2, 2)^t$, zeg $\nu \cdot (1, -2, 2)^t$. Dit geeft $Q = P + \nu \cdot (1, -2, 2)^t = (1 + 2\lambda + \nu, \lambda - 2\nu, 1 + 2\nu)^t$, en dit punt moet dus op m liggen. Uit opgave (b) weten we dat dan moet gelden dat $1 + 2\lambda + \nu = 0$ en $\lambda - 2\nu = 1 + 2\nu$. Oplossen van dit stelsel geeft $\lambda = -\frac{1}{3}$ en $\nu = -\frac{1}{3}$. De afstand tussen

l en m is de lengte van de vector $\overrightarrow{PQ}$, en die is $|-\frac{1}{3}\cdot(1,-2,2)^t| = \frac{1}{3}\cdot|(1,-2,2)^t| = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{9} = 1$.

Alternatieve uitwerking. In de uitwerking hierboven is het ook mogelijk om $(1+2\lambda+\nu,\lambda-2\nu,1+2\nu)^t$ in te vullen in de originele vergelijkingen van m, en het resulterende stelsel op te lossen. Dit is iets meer werk, maar geeft natuurlijk hetzelfde antwoord.

Alternatieve uitwerking. Tot slot is het mogelijk om $(1+2\lambda+\nu,\lambda-2\nu,1+2\nu)^t$ gelijk te stellen aan $(0,\mu,\mu)^t$, en dit stelsel van drie vergelijkingen in drie onbekenden op te lossen. Ook hiervoor geldt: dit is iets meer werk, maar geeft hetzelfde antwoord.

Opgave 2

(a) Zij $S\cap T = \{v_1,\ldots,v_k\}$ met $k>0$ omdat de doorsnede niet leeg is. Dan kunnen we S en T schrijven als

$$S = \{v_1,\ldots,v_k,s_1,\ldots,s_n\} \quad \text{en} \quad T = \{v_1,\ldots,v_k,t_1,\ldots,t_m\}$$

met $n,m\geq 0$.

Zij $v\in Span(S\cap T)$ willekeurig. Dan is $v=\lambda_1v_1+\ldots+\lambda_kv_k$ voor zekere $\lambda_i\in\mathbb{R}$. We kunnen v ook zien als

$$v=\lambda_1v_1+\ldots+\lambda_kv_k+0s_1+\ldots+0s_n,$$

waardoor $v\in Span(S)$ en

$$v=\lambda_1v_1+\ldots+\lambda_kv_k+0t_1+\ldots+0t_m,$$

waardoor $v\in Span(T)$. Dus $v\in Span(S)\cap Span(T)$.

Omdat v een willekeurig element van $Span(S\cap T)$ was, kunnen we concluderen dat voor alle elementen $v\in Span(S\cap T)$ geldt dat $v\in Span(S)\cap Span(T)$, i.e.

$$Span(S\cap T)\subseteq Span(S)\cap Span(T).$$

(b) *Optie 1:* algemeen beredeneren dat als $S=T\neq\emptyset$, dan is $S\cap T=S$ en dus

$$Span(S\cap T)=Span(S)=Span(S)\cap Span(S)=Span(S)\cap Span(T).$$

Optie 2: Een concreet voorbeeld geven, bijvoorbeeld: $S=T=\{(1,0,0)^t\}$. Let op dat bij moeilijkere voorbeelden je zorgvuldig moet laten zien dat het voorbeeld voldoet aan de gevraagde gelijkheid, want dat is vaak niet triviaal. **Tegenvoorbeeld:** Stel $S=\{(1,0,0)^t,(1,2,0)^t,(1,2,3)^t\}$ en $T=\{(1,0,0)^t,(0,1,0)^t,(0,0,1)^t\}$. Dan is $S\cap T=\{(1,0,0)^t\}$ en dus

$$Span(S\cap T)=\{\lambda(1,0,0)^t \mid \lambda\in\mathbb{R}\}.$$

Verder geldt

$$Span(S)=\{\lambda(1,0,0)^t+\mu(1,2,0)^t+\nu(1,2,3)^t \mid \lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}\}$$

en

$$Span(T)=\{\lambda(1,0,0)^t+\mu(0,1,0)^t+\nu(0,0,1)^t \mid \lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}\}$$

maar hiervan kun je *niet* concluderen dat $Span(S)\cap Span(T) =^* \{\lambda(1,0,0)^t \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$!! Echter geldt $Span(S)=Span(T)=\mathbb{R}^3$ waardoor $Span(S)\cap Span(T)=\mathbb{R}^3$, dus dit is geen goed voorbeeld voor 2b (wel voor 2c!).

(c) Hier zijn er weer veel mogelijke voorbeelden, neem bijvoorbeeld $S = \{(1,0)^t, (0,1)^t\}$ en $T = \{(1,0)^t, (-2,5)^t\}$ of zie tegenvoorbeeld bij 2b. We hebben $S \cap T = \{(1,0)^t\}$ en $Span(S \cap T) = \{\lambda(1,0)^t \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, maar $Span(S) = Span(T) = \mathbb{R}^2$. Er geldt dus $\{\lambda(1,0)^t \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}^2$, bijvoorbeeld omdat de eerste deelruimte dimensie 1 heeft terwijl de tweede dimensie 2 heeft, of omdat $(0,1)^t \in \mathbb{R}^2$ maar $(0,1)^t \neq \lambda(1,0)^t$ voor alle mogelijke $\lambda \in \mathbb{R}$.

Opgave 3

(a) Omdat $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, weten we met Stelling 4.2.4 (2) dat we alleen hoeven na te gaan voor welke waarden van a de vier vectoren onafhankelijk zijn. Volgens Stelling 4.2.6 kunnen we dit doen door middel van Gauss-eliminatie toe te passen op de matrix met de vier vectoren in de kolommen. Het aantal pivotelementen dat we krijgen is dan gelijk aan de rang van de matrix waar we mee begonnen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \\ -2 & 6 & a+3 & -4 \\ 0 & 1 & a & a(a-1) \end{pmatrix}.$$

We trekken tweemaal de eerste rij af van de tweede en tellen tweemaal de eerste rij op bij de derde rij, en krijgen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & a & a(a-1) \end{pmatrix}.$$

Vervolgens trekken we tweemaal de tweede rij af van de derde rij en trekken de tweede rij af van de vierde rij, en krijgen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & a(a-1) \end{pmatrix}.$$

Als laatste trekken we de derde rij af van de vierde rij en we krijgen de rijgereduceerde matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(a-1) \end{pmatrix}.$$

Deze matrix heeft vier pivotelementen precies dan als $a - 1 \neq 0$ en $a(a-1) \neq 0$, oftewel als $a \neq 1$ en $a \neq 0$. De vier vectoren vormen dus een basis precies dan als $a \neq 1$ en $a \neq 0$.

(b) We gebruiken de rijgereduceerde matrix uit (a) en vullen $a = 0$ in:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

We zien dat deze matrix drie pivotelementen heeft, dus uit Stelling 4.2.6 (laatste regel) volgt dat de rang van A gelijk aan is 3 als $a = 0$.

(c) We gebruiken opnieuw de rijgereduceerde matrix uit (a) en vullen $a = 1$ in:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

We zien dat deze matrix twee pivotelementen heeft, dus uit Stelling 4.2.6 (laatste regel) volgt dat de rang van A gelijk aan is 2. Uit Stelling 4.3.2 volgt nu dat $\dim(\mathrm{Nul}(A)) = 4 - 2 = 2$, dus de dimensie van de nulruimte is twee als $a = 1$.

We bepalen een basis voor de nulruimte met behulp van de rijgereduceerde matrix, en passen eerst nog Jordan-eliminatie toe door tweemaal de tweede rij op te tellen bij de eerste rij, en krijgen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De nulruimte van matrix A is gelijk aan de nulruimte van de volledig rijgereduceerde matrix die we zo verkregen hebben. Hieruit volgt dat $(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathrm{Nul}(A)$ precies dan als $x_2 = -x_3$ en $x_1 = -x_3 - 2x_4$. Kiezen we $x_4 = 1$ en $x_3 = 0$ dan vinden we de basisvector $(-2, 0, 0, 1)^t$; kiezen we $x_4 = 0$ en $x_3 = 1$ dan vinden we als tweede basisvector $(-1, -1, 1, 0)^t$.

(d) Uit Stelling 6.3.5 volgt dat de matrix A inverteerbaar is precies dan als de rang van A gelijk is aan vier. In onderdeel (a) hebben we laten zien dat dit precies het geval is als $a \neq 1$ en $a \neq 0$. We concluderen dat A inverteerbaar is dan en slechts dan als $a \neq 1$ en $a \neq 0$.

Opgave 4

Wij schrijven

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a \\ 2a & a+b & a+b & a+b \\ 2a & a+b & a+b+c & a+b+c \\ 2a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \end{vmatrix}.$$

We gebruiken Stelling 6.3.1 om de matrix te vereenvoudigen. Eerst trekken we tweemaal de eerste rij af van de resterende rijen. Dat geeft,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a \\ 0 & b & b & b \\ 0 & b & b+c & b+c \\ 0 & b & b+c & b+c+d \end{vmatrix}.$$

Trek nu de tweede rij af van de derde en vierde rijen. Nu hebben we

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a \\ 0 & b & b & b \\ 0 & 0 & c & c \\ 0 & 0 & c & c+d \end{vmatrix}.$$

Vervolgens trekken we de derde rij af van de vierde. Dat geeft,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a \\ 0 & b & b & b \\ 0 & 0 & c & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}.$$

We kunnen nu Stelling 6.4.1 gebruiken en we concluderen dat

$$\Delta = abcd.$$

Er zijn veel manieren om deze oefening te doen. Dit is slechts een voorbeeld.

Opgave 5

(a) Neem de volgende matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deze hebben beide rang 1, want ze hebben beide één pivotelement. Er geldt dat

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dit matrix heeft rang 2, want er zijn twee pivotelementen. Er geldt in dit geval dus $\text{rang}(A) + \text{rang}(B) = \text{rang}(A + B)$, precies wat we wilden.

Alternatieve uitwerking. Er zijn vele andere matrices mogelijk dan deze, hoewel er altijd geldt dat $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = 1$. Ook zijn er vele methoden om te controleren dat de matrices inderdaad de gewenste rang hebben.

(b) Wegens stelling 6.3.5 geldt dat $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = n$, omdat ze beide inverteerbaar zijn. Daarnaast geldt dat $\text{rang}(A + B) \leq n$, wegens de hoofdstelling 4.4.2. We weten dat n een positief getal is, dus $n < 2n$. We concluderen dat

$$\text{rang}(A + B) \leq n < 2n = \text{rang}(A) + \text{rang}(B).$$

Dit is wat we wilden.

(c) Laat A_i de i-de kolom van A zijn en B_i de i-de kolom van B. Dan is de i-de kolom van $A + B$ gelijk aan $A_i + B_i$. Zij W het opspansel van de kolommen van $A + B$. Neem $x \in W$. Dan kunnen we schrijven:

$$x = \lambda_1(A_1 + B_1) + \lambda_2(A_2 + B_2) + \ldots + \lambda_n(A_n + B_n).$$

Definieer $u = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_n A_n$ en $v = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \ldots + \lambda_n B_n$. We kunnen de bovenstaande vergelijking dan ook schrijven als

$$x = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_n A_n + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \ldots + \lambda_n B_n = u + v.$$

Per definitie geldt dat $u \in U$ en $v \in V$. Dus $x = u + v \in U + V$, per definitie van de somruimte. Dit geldt voor alle $x \in W$, dus $W \subseteq U + V$.

Alternatieve uitwerking. Gebruik dezelfde notatie als hierboven. Merk op dat $A_i \in U$ en $B_i \in V$, dus $A_i + B_i \in U + V$, voor alle $1 \leq i \leq n$. Dus geldt er dat alle kolommen van $A + B$ in $U + V$ zitten. Dan is het opspansel W van de kolommen van $A + B$ een deelverzameling van $U + V$, omdat een lineaire combinatie van elementen van $U + V$ weer in $U + V$ zit ($U + V$ is immers een deelruimte).

(d) We noteren het opspansel van de kolommen van $A + B$ weer met W. Per definitie geldt er dat $\text{rang}(A+B) = \dim(W)$, $\text{rang}(A) = \dim(U)$ en $\text{rang}(B) = \dim(V)$. Nu gebruiken we het resultaat uit (c). Dit vertelt ons dat $\dim(W) \leq \dim(U + V)$. Wegens stelling 4.4.1 geldt $\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$. Aangezien $\dim(U \cap V)$ niet-negatief is, volgt er dus dat $\dim(U + V) \leq \dim(U) + \dim(V)$. We krijgen dus dat

$$\dim(W) \leq \dim(U + V) \leq \dim(U) + \dim(V).$$

Met wat we in het begin opmerkten volgt meteen dat

$$\text{rang}(A + B) \leq \text{rang}(A) + \text{rang}(B).$$