Herexamen 5 januari 2021

(2) We bepalen de oplossingsverzameling van het stelsel

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + a x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Met behulp van Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & a & 5 \end{array}\right) \underset{\substack{r_2 \to r_2 - r_1 \\ r_3 \to r_3 - 2r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a-2 & 3 \end{array}\right) \underset{r_3 \to r_3 - r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{a-3} & 1 \end{array}\right) \quad (*)$$

geval $a = 3$: de rijgereduceerde matrix is dan: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. We zien dat dit stelsel strijdig is (want $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$), dus het stelsel heeft geen oplossingen.

geval $a \neq 3$: de rijgereduceerde matrix $(*)$ heeft drie pivots (in rood) dus het stelsel heeft een unieke oplossing.

We concluderen dat er geen $a \in \mathbb{R}$ is zodat het stelsel ∞ veel oplossingen heeft.

3

We bepalen ~~eerst~~ een basis voor $\text{Span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4)$, hieruit volgt dan de dimensie.

We zetten $\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_4$ als kolommen in een matrix en passen ~~...~~ Gausseliminatie toe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ -4 & -9 & -1 & -6 \\ 3 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In rood geven we de pivots aan.

[Omdat de relaties tussen de kolommen van de rijgereduceerde matrix hetzelfde zijn als de relaties tussen de oorspronkelijke matrix vinden we dat

$$B = \left\{ \underset{\bar{v}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}}, \underset{\bar{v}_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}}, \underset{\bar{v}_4}{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}} \right\}$$

een basis is voor $\text{Span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4)$

En dus is $\dim(\mathrm{Span}(\bar{v}_1, .. \bar{v}_4)) = 3$.

b) ~~Uit de rijgereduceerde matrix (*) kan we direct afleiden~~ lezen

$\bar{v}_3$ We passen ~~ook dezelfde~~ nog eens rij-operaties toe ~~elementaire~~ op (*)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_1 \to r_1 - 2r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

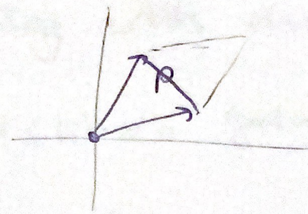
We lezen af dat $\bar{v}_3 = \bar{v}_2 - 2\bar{v}_1$.

dus $x_1 = -2$
$x_2 = 1$
$x_4 = 0$.

dus $\bar{v}_3 \in \mathrm{Span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_4)$.

④ We transleren eerst de punten over $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ naar de oorsprong en krijgen als hoekpunten

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$$



Dan is $\text{opp}(p) = \left| \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} \right| = \left| \left(\begin{vmatrix}-2 & 2\\1 & 3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 3\\-1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-1 & 0\\-2 & 2\end{vmatrix} \right)^t \right| =$

$|(-8, 3, -2)| = \sqrt{64+9+4} = \sqrt{77}$ Dan opp(driehoek) $= \frac{1}{2}\sqrt{77}$.

⑤ a) De bewering is onwaar: Neem $A = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

Dan geldt: 1) $\det(A) = 0 = \det(B)$

2) $\text{rang}(A) = 0$ en $\text{rang}(B) = 1$ dus $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(B)$.

5

b) De bewering is waar.

Laat $A, B \in M_{n,n}$ ~~willekeurig~~ met ~~Als~~ $\det(A) \neq \det(B) \neq 0$ willekeurig.

Omdat $\det(A) \neq 0$ en $\det(B) \neq 0$ geldt dat A en B inverteerbaar zijn. Dus volgens stelling 6.3.5 geldt $\text{rang}(A) = n$ en $\text{rang}(B) = n$

Dus $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$.

c) De bewering is onwaar. Neem $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Dan is $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = 2 \; (=n)$ terwijl $\det(A) = 1$ en $\det(B) = 2$, dus $\det(A) \neq \det(B)$.

d) De bewering is waar. Laat $A, B \in M_{n,n}$ ~~willekeurig~~ met $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) \neq n$. Omdat $\text{rang}(A) \neq n$ en $\text{rang}(B) \neq n$ ~~zijn~~ volgens stelling 6.3.5 A en B niet inverteerbaar, dus $\det(A) = 0$ en $\det(B) = 0$ dus $\det(A) = \det(B)$.

6

a) Neen $A=\begin{pmatrix}0&3\\-3&0\end{pmatrix}$ dan is $A^t=\begin{pmatrix}0&-3\\3&0\end{pmatrix}$ en $-A=\begin{pmatrix}0&-3\\3&0\end{pmatrix}$ dus $A^t=-A$.

b) ~~g~~ Laat $A\in M_{nn}$ met $A^t=-A$ en n oneven ~~n~~ willekeurig zijn.

Dan geldt ~~A~~ $\det(A^t)=\det(-A)=(-1)^n\det(A)=-\det(A)$

~~Omdat~~ Ook geldt volgens stelling 6.3.2 dat $\det(A^t)=\det(A)$

Dus $\det(A)=-\det(A)$. Hieruit volgt dat $\det(A)=0$.