Deeltoets Lineaire algebra 2 (WISB108)
Dinsdag 15 december 2020 15.15-16.00

Docent: *Barbara van den Berg*

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Het gebruik van het dictaat is toegestaan. Het gebruikt van andere hulpmiddelen zoals telefoons, laptops, rekenmachines of andere bronnen is **NIET** toegestaan.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs je beweringen.

Opgave 1

(*10 punten*) Waar of onwaar: De verzameling $W = \{A \in M_{2,2} | \det(A) \neq 0\}$ van 2×2-matrices met determinant ongelijk aan nul is een lineaire deelruimte van $M_{2,2}$. Licht je antwoord toe.

Uitwerking: De bewering is onwaar want de nulmatrix heeft determinant gelijk aan 0 *en dus is de nulvector geen element van* W*.*

Opgave 2

(*35 punten*) Laat $E = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ de standaardbasis van $\mathbb{R}^2$ zijn en $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ een lineaire afbeelding zodat $A_E^E = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$. Geef een basis B van $\mathbb{R}^2$ en een inverteerbare matrix S zodat A_B^B diagonaal is en $A_E^E = S A_B^B S^{-1}$.

Uitwerking: we berekenen eerst de eigenwaarden van A_E^E *met behulp van het karakteristieke polynoom:*

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\2 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3).$$

We vinden als eigenwaarden $\lambda_1 = -1$ *en* $\lambda_2 = 3$*. Voor iedere eigenwaarde vinden we een eigenvector door een basis van de nulruimte van* $A_E^E - \lambda I$ *te bepalen:*

Voor $\lambda_1 = -1$ *geldt* $A_E^E - \lambda_1 I = \begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 2\end{pmatrix}$ *en met Gausseleminatie krijgen we* $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$*; een eigenvector bij* λ_1 *is dus* $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$*. Voor* $\lambda_2 = 3$ *geldt* $A_E^E - \lambda_2 I = \begin{pmatrix}-2 & 2\\2 & -2\end{pmatrix}$ *en met Gausseleminatie krijgen we* $\begin{pmatrix}-1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$*; een eigenvector bij* λ_2 *is dus* $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$*. Omdat de matrix twee verschillende eigenwaarden heeft concluderen we dat de eigenvectoren een basis* $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ *vormen voor* $\mathbb{R}^2$ *en dus dat als* $S = I_E^B$ *(de matrix met de eigenvectoren* $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ *als kolommen) dan geldt* $A_E^E = I_E^B A_B^B I_B^E = S A_B^B S^{-1}$*, met* $A_B^B = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$*.*

Opgave 3

(*35 punten*) Laat $A : \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ de lineaire afbeelding zijn gedefinieerd door

$$A(P(X)) = P'(X) = \frac{dP(X)}{dX},$$

de afgeleide van $P(X)$. Je hoeft voor het vervolg niet te bewijzen dat A lineair is. Laat $E = \{1, X, X^2\}$ de standaardbasis zijn van $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$.

(a). (*13 punten*) Geef de matrix A_E^E.

(b). (*12 punten*) Wat zijn de eigenwaarden van A_E^E?

(c). (*10 punten*) Laat zien dat A niet diagonaliseerbaar is.

Uitwerking:

(a). Er geldt $A(1)_E = (0)_E = (0,0,0)^t$; $A(X)_E = (1)_E = (1,0,0)^t$ *en* $A(X)_E = (sX)_E = (0,2,0)^t$ *en dus vinden we dat:*

$$A_E^E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b). Het karakteristieke polynoom is gelijk aan:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^3.$$

De nulpunten zijn dus allen gelijk aan 0, *dus de enige eigenwaarde van* A_E^E *is* $\lambda = 0$, *met algebraïsche multipliciteit* 3.

(c). De meetkundige multipliciteit van $\lambda = 0$ *is gelijk aan de dimensie van de nulruimte van* $A_E^E - 0I = A_E^E$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

We zien dat de dimensie van de nulruimte hiervan gelijk aan 1, *want er zijn twee pivotelementen, dus de rang van* $A_E^E - 0I$ *is* 2. *We concluderen dat de meetkundige multipliciteit van* $\lambda = 0$ *strikt kleiner is dan de algebraïsche multipliciteit, en dus dat* $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ *geen basis van eigenvectoren van* A *heeft en daarom is* A *niet diagonaliseerbaar.*

Opgave 4

(*20 punten*) Laat V een vectorruimte zijn over $\mathbb{R}$ van eindige dimensie en $A : V \to V$ een lineaire afbeelding. Bewijs dat A injectief is dan en slechts dan als A surjectief is.

Uitwerking: We gebruiken de dimensiestelling die zegt dat

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(A(V)).$$

Er geldt: A *is injectief* $\iff \mathrm{Ker}(A) = \{0\} \iff \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 0 \iff \dim(A(V)) = \dim(V) \iff A(V) = V$ *(want* $A(V) \subseteq V$*)* $\iff A$ *is surjectief.*