INLEIDING GROEPEN EN RINGEN 2019–2020

TENTAMEN DINSDAG 23 JUNI, 13:30-16:30

Het "Protocol online tentamens Wiskunde" is van toepassing.

Hoe inleveren?

- Lever de uitwerking vier keer in via "Opdrachten/Inleveropgaves" in Blackboard. Er zijn vier inleverpunten, in principe één per tentamenvraag, maar je mag ook de uitwerking van het volledige tentamen vier keer inleveren. Je kan reeds ingeleverd werk zo vaak opnieuw indienen als je wilt, tot de deadline.
- De *deadline voor online inleveren* is dinsdag 23 juni, 17:30 (dit is inclusief een uur extra tijd voor inscannen en uploaden).
- Studenten met recht op extra tijd kunnen ook na de deadline inleveren tot de hun toegekende extra tijd is opgebruikt; volgens protocol is dat tot 18:00 (inclusief een uur extra tijd voor inscannen en uploaden). We zullen dan bij het nakijken de markering "te laat" verwijderen. Werk dat te laat wordt ingeleverd zal niet worden bekeken.

Wat inleveren?

- Je mag een getypte tekst (pdf) of duidelijk leesbare scan inleveren. De naam van het bestand heeft de vorm `<voornaam>_<achternaam>_<studentnummer>.pdf` en de uitwerking bevat je naam en studentnummer. Je mag in het Nederlands of Engels antwoorden. Van de tentamenvragen is hieronder een Nederlandse en Engelse versie beschikbaar.
- Bij je uitwerkingen moet één keer de ondertekende verklaring zitten die op de volgende bladzijde staat (je mag die ook met de hand overschrijven en dan ondertekenen). Voor dit tentamen zijn de toegestane hulpmiddelen: het cursusboek/eigen aantekeningen/streams van hoorcolleges/materiaal op de blackboard-site van het vak. Je mag (voor jezelf) met rekenmachine of computer (online calculator of computeralgebrapaketten) dingen narekenen, maar de output van een dergelijke berekening overnemen zonder uitleg telt niet als correct antwoord. Er mag niet worden overlegd met anderen, ook niet digitaal. In het bijzonder is het verboden tentamenvragen te posten op online fora. Plagiaat, ook uit digitale bronnen, wordt niet getolereerd.
- Schrijf helder maar bondig. Geef niet enkel het antwoord, maar ook de motivatie. Antwoorden zonder uitleg leveren geen punten op.
- Er geldt *geen* "voortschrijdend ongeluk": als je een onderdeel (x) van die vraag niet kan, maar wel een daaropvolgend onderdeel (y) kan maken door aan te nemen dat (x) klopt, dan mag je dat gebruiken en haal je bij een correcte oplossing de aangegeven punten voor (y).

Communicatie tijdens het tentamen.

- Eventuele mededelingen van de docent tijdens het tentamen zullen op blackboard worden gepost in de mededelingen en direct per email worden verstuurd.
- Heb je een vraag over het tentamen, bijvoorbeeld over een opgave? Werkt je internet niet of ben je in paniek? Je kan tijdens het tentamen een email sturen naar `g.cornelissen@uu.nl`. Je kan ook bellen naar het nummer `+31 20 808 1104` en `meeting ID 498 742 6010` invoeren om in verbinding te komen met een docent. Via het nummer dat je belt kom je telefonisch bij een online vergadering; als meerdere mensen tegelijk inbellen dan moet je misschien even wachten of terugbellen.

Succes!

Verklaring

Dinsdag 23 juni 2020

Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen van dit tentamen zelf heb gemaakt, zonder hulp van andere personen of van andere hulpmiddelen dan beschreven op het tentamenblad.

Naam: ____

Studentnummer: ____

Handtekening: ____

100pt

Tentamenvragen (English version follows)

$\mathbf{R}$ zijn de reële getallen, $\mathbf{Z}$ de gehele getallen, met $N \in \mathbf{Z}$ is $\mathbf{Z}/N := \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, "ggd" is "grootste gemeenschappelijke deler" en "kgv" is "kleinste gemeen veelvoud". Als I en J twee idealen zijn, dan is $I \cdot J = IJ$ hun product als idealen. Je mag gebruiken dat het huidige jaar als volgt ontbindt in priemfactoren: $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$.

Vraag 1.

8pt (a) Representeer de restklasse $\overline{7}^{-1}$ in $(\mathbf{Z}/2020)^*$ door een element in $\{0, \ldots, 2019\}$.

8pt (b) Stel $D_{14} = \langle r, s \mid r^7 = s^2 = e, rsr = s \rangle$ is de diëdergroep van orde 14. Schrijf het element

$$r^{23}s^6r^{2020} \in D_{14}$$

met hoogstens 3 symbolen (iedere letter, teken en cijfer telt als één symbool).

8pt (c) Bereken de orde van de matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.

8pt (d) Definieer de hoofdidealen $I := (x)$, $J := (x+1)$ en $K := (x^{2020} + x)$ in de polynomenring $\mathbf{R}[x]$. Schrijf het ideaal $I \cdot (I + (J \cap K))$ als hoofdideaal.

Vraag 2. Zijn onderstaande beweringen waar of onwaar? Bewijs of weerleg.

8pt (a) In de permutatiegroep S_5 is het product van 2020 4-cykels een even permutatie.

8pt (b) Als een groep G werkt op een ruimte X, dan vormt de collectie stabilisatoren $\{G_x : x \in X\}$ een partitie van G.

8pt (c) De ring $\mathbf{Z}/4$ (voor de ringstructuur die komt van modulorekenen) is een lichaam.

8pt (d) Het ideaal $(x+1)$ is een maximaal ideaal in de ring $\mathbf{R}[x, y]$.

Vraag 3. Geef een voorbeeld van, of laat zien dat zoiets niet kan bestaan:

8pt (a) Een groep van orde 6^{2020} met een ondergroep van orde 23.

8pt (b) Een niet-injectief groepshomomorfisme $\varphi : G \to H$ waarbij de orde van G gelijk is aan $|G| = 505$ en het beeld van G niet commutatief is.

8pt (c) Een niet-injectief ringhomomorfisme $\varphi : \mathbf{R} \to S$, met S een domein, en beeld $\varphi(\mathbf{R}) \neq \{0\}$.

Vraag 4. Stel dat R een domein is, en I en J twee willekeurige idealen in R.

4pt (a) Bewijs dat de afbeelding

$$\psi : R/I \times R/J \mapsto R/(I+J) : (r + I, s + J) \mapsto r - s + I + J$$

een welgedefinieerd surjectief groepshomomorfisme is (voor de optelling).

4pt (b) De afbeelding

$$\varphi : R \mapsto R/I \times R/J : r \mapsto (r + I, r + J)$$

is een ringhomomorfisme (dat hoef je niet te bewijzen). Toon aan dat $\varphi(R) = \ker(\psi)$.

2pt (c) Hoe volgt uit (b) dat φ surjectief is voor twee comaximale idealen I en J?

2pt (d) Hoe volgt uit (b) dat voor twee gehele getallen $a, b \in \mathbf{Z}$ altijd geldt dat

$$a \cdot b = \mathrm{ggd}(a, b) \cdot \mathrm{kgv}(a, b)?$$

Einde van het tentamen

100pt

Exam questions

$\mathbf{R}$ denotes the real numbers, $\mathbf{Z}$ the integers, for $N \in \mathbf{Z}$ is $\mathbf{Z}/N := \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, "gcd" is "greatest common divisior" en "lcm" is "least common multiple". If I and J are ideals, then $I \cdot J = IJ$ denotes their product as ideals. You may use that the current year has prime factorisation $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$.

Question 1.

8pt (a) Represent the class $\overline{7}^{-1}$ in $(\mathbf{Z}/2020)^*$ by an element from the set $\{0, \dots, 2019\}$.

8pt (b) Denote by $D_{14} = \langle r, s \mid r^7 = s^2 = e, rsr = s\rangle$ the dihedral group of order 14. Rewrite the element

$$r^{23}s^6r^{2020} \in D_{14}$$

using at most 3 symbols (counting every letter, sign, or digit as one symbol).

8pt (c) Compute the order of the matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.

8pt (d) Define the principal ideals $I := (x)$, $J := (x + 1)$ en $K := (x^{2020} + x)$ in the polynomial ring $\mathbf{R}[x]$. Rewrite the ideal $I \cdot (I + (J \cap K))$ as principal ideal.

Question 2. Are the following statements true or false? Prove or disprove.

8pt (a) In the permutation group S_5, the product of 2020 4-cycles is an even permutation.

8pt (b) Suppose a group G acts on a set X; then the collection of stabilizers $\{G_x : x \in X\}$ forms a partition of G.

8pt (c) The ring $\mathbf{Z}/4$ (for the ring structure given by calculating modulo 4) is a field.

8pt (d) The ideal $(x + 1)$ is maximal in the ring $\mathbf{R}[x, y]$.

Question 3. Give an example of, or show that such a thing cannot exist:

8pt (a) A group of order 6^{2020} containing a subgroup of order 23.

8pt (b) A non-injective group homomorphism $\varphi\colon G \to H$, such that the order of G equals $|G| = 505$, and such that the image of G is non-commutative.

8pt (c) A non-injective ring homomorphism $\varphi\colon \mathbf{R} \to S$, with S an integral domain and $\varphi(\mathbf{R}) \neq \{0\}$.

Question 4. Suppose R is an integral domain, and let I en J denote two arbitrary ideals of R.

4pt (a) Prove that the map

$$\psi\colon R/I \times R/J \mapsto R/(I + J)\colon (r + I, s + J) \mapsto r - s + I + J$$

is a well-defined surjective group homomorphism (for addition).

4pt (b) The map

$$\varphi\colon R \mapsto R/I \times R/J\colon r \mapsto (r + I, r + J)$$

is a ring homomorphism (you don't need to prove that). Prove that $\varphi(R) = \ker(\psi)$.

2pt (c) How does (b) imply that φ is surjective for two comaximal ideals I, J?

2pt (d) How does (b) imply that for any two integers $a, b \in \mathbf{Z}$ we always have

$$a \cdot b = \gcd(a, b) \cdot \mathrm{lcm}(a, b)?$$

End of the exam