INLEIDING GROEPEN EN RINGEN, 2019–2020

PROEFENTAMEN 2

Vraag 1.

8pt (a) Geef een representant in $\{0, \ldots, 999\}$ voor de restklasse $\overline{3}^{-1}$ in $(\mathbf{Z}/1000)^*$.

8pt (b) Schrijf de elementen van de diëdergroep D_{12} als $\{e, r, \ldots, r^5, s, rs, \ldots, r^5 s\}$ voor $r, s \in D_{12}$ zodat $r^6 = s^2 = e$ en $sr = r^{-1}s$. Welk van deze 12 elementen is $r^3 sr^2 srs \in D_6$?

8pt (c) Bepaal de orde van $(1342)(126)(132)$ in S_6.

8pt (d) Bepaal een oplossing $f \in \mathbf{R}[x]$ voor de simultane congruenties

$$\begin{cases} f \equiv x & \mod x^2 + 1, \\ f \equiv x^3 + 2 & \mod x^4. \end{cases}$$

Vraag 2. Zijn onderstaande beweringen waar of onwaar? Bewijs of weerleg.

8pt (a) Ieder groep G is een normale ondergroep van een groep $H \neq G$.

8pt (b) Als G een willekeurige groep is met een normale ondergroep van orde 2020 en een normale ondergroep van orde 1990, dan bevat G ook een normale ondergroep van orde 10.

8pt (c) De ring $\mathbf{Z}/4[x]$ is een domein.

8pt (d) Het ideaal (x, y) is een hoofdideaal in de ring $\mathbf{R}[x, y]$.

Vraag 3. Geef een voorbeeld van, of laat zien dat zoiets niet kan bestaan:

8pt (a) Een groep van orde 2020 die niet cyclisch is.

8pt (b) Een groepshomomorfisme van eindige groepen $\varphi \colon G \to H$ met $|\varphi(G)| > 1$ zodat $|G|$ en $|H|$ copriem zijn.

8pt (c) Een irreducibel polynoom in $\mathbf{Q}(x)[y]$ dat reducibel is in $\mathbf{Q}[x, y]$ (hierbij is $\mathbf{Q}(x)$ het breukenlichaam van de polynomenring $\mathbf{Q}[x]$).

Vraag 4. Een ondergroep H van de permutatiegroep S_n op n letters heet *transitief* als er voor ieder paar elementen $x, y \in \Omega := \{1, \ldots, n\}$ een element $\sigma \in H$ bestaat zodat $\sigma(x) = y$.

Een deelverzameling $B \subseteq X$ heet een *blok voor* H als voor iedere $\sigma \in H$, ofwel $\sigma(B) = B$ ofwel $\sigma(B) \cap B = \emptyset$ (d.w.z. ieder element van H beeldt B volledig binnen, of volledig buiten B af). We noemen een blok B triviaal als $B = X$ of $\#B \leq 1$.

De groep H heet *primitief* als H transitief is en enkel triviale blokken heeft.

3pt (a) Bewijs dat de actie van S_n op Ω transitief is. Geef voor iedere $n \geq 3$ een voorbeeld van een ondergroep $\{e\} \neq H \subseteq S_n$ die niet transitief is.

3pt (b) Geef, voor $n = 2020$, een voorbeeld van een primitieve en een niet-primitieve ondergroep $H \leq S_n$ met $H \neq \{e\}$ en $H \neq S_n$.

6pt (c) Bewijs: een transitieve ondergroep H van S_n is primitief dan en slechts dan als voor alle $x \in X$, $H_x := \{\sigma \in H \colon \sigma(x) = x\}$ (de stabilizator van x in H) een *maximale* ondergroep is (d.w.z., er bestaat geen groep H' met $H_x \subset H' \subset H$ met $H' \neq H_x$ en $H' \neq H$).
