INLEIDING GROEPEN EN RINGEN 2020–2021

TENTAMEN 28 JUNI 2021, 15:15-18:15 (ONLINE VERSIE)

Het “Protocol online tentamens Wiskunde” is van toepassing.

Hoe inleveren?

- Lever de uitwerking in via “Opdrachten/Inleveropgaves” in Blackboard. Je kan reeds ingeleverd werk zo vaak opnieuw indienen als je wilt, tot de deadline.
- De *deadline voor online inleveren* is maandag 28 juni, 18:55 (dit is inclusief 40 minuten extra tijd voor inscannen en uploaden). Let op: lever voor 18:30 in ieder geval een voorlopige scan of foto’s van je werk in.
- Studenten met recht op extra tijd kunnen ook na de deadline inleveren tot de hun toegekende extra tijd is opgebruikt; volgens protocol is dat tot 19:25 (inclusief de extra tijd voor inscannen en uploaden). We zullen dan bij het nakijken de markering “te laat” verwijderen. In andere gevallen zal werk dat te laat wordt ingeleverd niet worden bekeken.

Wat inleveren?

- Je mag een getypte tekst (pdf) of duidelijk leesbare scan inleveren. De naam van het bestand heeft de vorm `<voornaam>_<achternaam>_<studentnummer>.pdf` en de uitwerking bevat je naam en studentnummer. Je mag in het Nederlands of Engels antwoorden. Van de tentamenvragen is hieronder een Nederlandse en Engelse versie beschikbaar.
- Bij je uitwerkingen moet de ondertekende verklaring zitten die op de volgende bladzijde staat (je mag die ook met de hand overschrijven en dan ondertekenen). Voor dit tentamen zijn de toegestane hulpmiddelen: het cursusboek, hoofdstuk 17 en 18 uit Armstrong, en eigen aantekeningen. Er mag niet worden overlegd met anderen, ook niet digitaal. In het bijzonder is het verboden tentamenvragen te posten op online fora. Plagiaat, ook uit digitale bronnen, wordt niet getolereerd.
- Schrijf helder maar bondig. Geef niet enkel het antwoord, maar ook de motivatie. Antwoorden zonder uitleg leveren geen punten op.
- Bij het geven van bewijzen mag je gebruik maken van alle kennis die je hebt opgedaan in de cursus, maar geef een duidelijke verwijzing als je iets gebruikt. Je mag zonder bewijs gebruik maken van stellingen uit de boeken of het hoorcollege, maar niet uit (zelfs gemaakte) opgaves.

Communicatie tijdens het tentamen.

- Zet tijdens het tentamen MS Teams aan; tijdens het online tentamen kan je gebeld worden om je identiteit te controleren (dus houd je ID-kaart bij de hand) en je werk te laten zien.
- Eventuele mededelingen van de docent tijdens het tentamen zullen op blackboard worden gepost in de mededelingen en direct per email worden verstuurd.
- Heb je een vraag over het tentamen, bijvoorbeeld over een opgave? Werkt je internet niet of ben je in paniek? Je kan tijdens het tentamen een email sturen naar `g.cornelissen@uu.nl`. Je kan ook bellen naar het nummer `+31 30 808 0335` en `Meeting ID: 407 868 4630` invoeren om in verbinding te komen met een docent. Via het nummer dat je belt kom je telefonisch bij een online vergadering; als meerdere mensen tegelijk inbellen dan moet je misschien even wachten of terugbellen.

Succes!

Verklaring

Maandag 28 juni 2021

Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen van dit tentamen zelf heb gemaakt, zonder hulp van andere personen of van andere hulpmiddelen dan beschreven op het tentamenblad.

Naam: ____

Studentnummer: ____

Handtekening: ____

100pt

Tentamenvragen (English version follows)

Notatie: $\mathbf{R}$ zijn de reële getallen, $\mathbf{Q}$ de rationale getallen, $\mathbf{Z}$ de gehele getallen, met $N \in \mathbf{Z}$ is $\mathbf{Z}/N := \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$; voor $m \in \mathbf{Z}$ is $\overline{m}$ de notatie voor de corresponderende klasse in $\mathbf{Z}/N$. Je mag gebruiken dat het huidige jaar als volgt ontbindt in priemfactoren: $2021 = 43 \cdot 47$.

Vraag 1.

8pt (a) Bereken de inverse van het element $\overline{13}$ in de groep $(\mathbf{Z}/2021)^*$ voor vermenigvuldiging, en schrijf het resultaat als $\overline{m}$ met $0 \leq m \leq 2020$.

8pt (b) Stel $D_{18} = \langle r, s \mid r^9 = s^2 = e, rsr = s \rangle$ is de diëdergroep van orde 18. Schrijf het element

$$r^{28}sr^{2021} \in D_{14}$$

met hoogstens 3 symbolen (iedere letter, teken en cijfer telt als één symbool).

8pt (c) Beschouw de elementen $\sigma_1 = (152)(34)$ en $\sigma_2 = (163)(45)$ in S_6. Bereken een element $\tau \in S_6$, geschreven als product van disjuncte cykels, zodat $\sigma_2 = \tau\sigma_1\tau^{-1}$.

Vraag 2. Zijn onderstaande beweringen waar of onwaar? Bewijs of weerleg.

8pt (a) In de permutatiegroep S_{2021} is een product van alle transposities (waarbij iedere transpositie precies één keer voorkomt) altijd een even permutatie.

8pt (b) Als H een ondergroep is van G, dan is H een normale ondergroep in G dan en slechts dan als $H \times A_{2021}$ een normale ondergroep is in $G \times S_{2021}$.

8pt (c) De ring $\mathbf{R}[x, y]/(x + 1)$ is een lichaam.

8pt (d) De ring $\mathbf{Z}[x]/(7)$ is een hoofdideaaldomein.

Vraag 3. Geef een voorbeeld van, of laat zien dat zoiets niet kan bestaan:

8pt (a) Oneindig veel verschillende elementen van orde 2 in $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.

8pt (b) Een groepsactie van de diëdergroep D_{32768} van orde $32768 = 2^{15}$ met een baan die precies 2021 elementen heeft.

8pt (c) Een deelring van $\mathbf{Q}[x]$ die geen euclidisch domein is voor de norm $N(f) = \deg(f)$ als $f \neq 0$ en $N(0) = 0$.

Vraag 4. Stel dat $R = \mathbf{Q}[x]/(x^2)$.

4pt (a) Bepaal de nuldelers in R.

8pt (b) Bepaal de eenheden R^* in R, en bewijs dat er een groepsisomorfisme $R^* \cong \mathbf{Q}^* \times \mathbf{Q}$ bestaat (hier is $\mathbf{Q}$ de groep $\mathbf{Q}$ van rationale getallen onder optellen, en $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ de groep van inverteerbare rationale getallen onder vermenigvuldigen).

8pt (c) Bepaal alle idealen van R, en geef aan welke hiervan priemidealen zijn en welke maximale idealen zijn.

Einde van het tentamen

100pt

Exam questions

$\mathbf{R}$ denotes the real numbers, $\mathbf{Q}$ the rational numbers, $\mathbf{Z}$ the integers, for $N \in \mathbf{Z}$ is $\mathbf{Z}/N := \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, and for $m \in \mathbf{Z}$, $\overline{m}$ denotes the corresponding class in $\mathbf{Z}/N$. You may use that the current year has prime factorisation $2021 = 43 \cdot 47$.

Question 1.

8pt (a) Compute the multiplicative inverse of $\overline{13}$ in the group $(\mathbf{Z}/2021)^*$ and write the result as $\overline{m}$ with $0 \leq m \leq 2020$.

8pt (b) Let $D_{18} = \langle r, s \mid r^9 = s^2 = e, rsr = s\rangle$ denote the dihedral group of order 18. Rewrite the element

$$r^{28} s r^{2021} \in D_{14}$$

using at most 3 symbols (where every letter, digit and sign counts as one symbol).

8pt (c) Consider the elements $\sigma_1 = (152)(34)$ and $\sigma_2 = (163)(45)$ in S_6. Compute an element $\tau \in S_6$, written as product of disjoint cycles, such that $\sigma_2 = \tau\sigma_1\tau^{-1}$.

Question 2. Are the following statements true or false? Prove or disprove.

8pt (a) In the permutation group S_{2021}, a product of all transpositions (in which every transposition occurs exactly once) is always an even permutation.

8pt (b) If H is a subgroup of a group G, then H is a normal subgroup of G if and only if $H \times A_{2021}$ is a normal subgroup of $G \times S_{2021}$.

8pt (c) The ring $\mathbf{R}[x, y]/(x + 1)$ is a field.

8pt (d) The ring $\mathbf{Z}[x]/(7)$ is a principal ideal domain.

Question 3. Give an example of, or show that such a thing cannot exist:

8pt (a) Infinitely many elements of order 2 in $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.

8pt (b) An action of the dihedral group D_{32768} of order $32768 = 2^{15}$ having an orbit consisting of exactly 2021 elements.

8pt (c) A subring of $\mathbf{Q}[x]$ that is not a Euclidean domain for the norm $N(f) = \deg(f)$ for $f \neq 0$ and $N(0) = 0$.

Question 4. Let $R = \mathbf{Q}[x]/(x^2)$.

4pt (a) Determine the zero divisors in R.

8pt (b) Determine the units R^* in R, and prove that there is a group isomorphism $R^* \cong \mathbf{Q}^* \times \mathbf{Q}$ (here, $\mathbf{Q}$ is the group of rational numbers for addition, and $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ is the group of invertible rational numbers for multiplication).

8pt (c) Determine all ideals of R, and indicate which ones are prime ideals and which ones are maximal ideals.

End of the exam