Inl. Analyse in Meer Variabelen **Proeftentamen 1/11-2021, 3 uur**

- Schrijf op ieder vel **je naam** en bovendien op het eerste vel je **studentnummer** en het **aantal ingeleverde vellen**.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Het is een open boek tentamen: dictaat en aantekeningen mogen worden gebruikt.
- De normering per onderdeel en voor de opgave als geheel staan vermeld. Het totaal aantal te behalen punten is 40. Het tentamencijfer T wordt berekend uit de totale score S door $T = S/4$, uitgerekend in 1 decimaal nauwkeurig.

Succes !

10 pt totaal **Opgave 1**

4 pt (a) Toon aan dat de afbeelding $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x \mapsto x_1x_2$ totaal differentieerbaar is, en dat voor alle $x \in \mathbb{R}^2$ geldt dat $D\varphi(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven wordt door

$$D\varphi(x)(h) = h_1x_2 + h_2x_1, \quad (h \in \mathbb{R}^2).$$

2 pt (b) Gegeven zijn een open deel $U \subset \mathbb{R}^n$ en een tweetal functies $f, g : U \to \mathbb{R}$ die totaal differentieerbaar zijn in $a \in U$. Je mag gebruiken dat dan $(f, g) : U \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (f(x), g(x))$ totaal differentieerbaar is in a. Toon aan dat de totale afgeleide gegeven wordt door:

$$D(f, g)(a) = \begin{pmatrix} Df(a) \\ Dg(a) \end{pmatrix}.$$

4 pt (c) Toon met behulp van (a), (b) en de kettingregel aan dat de functie $fg : U \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)g(x)$ totaal differentieerbaar is in a en dat $D(fg)(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven wordt door

$$D(fg)(a)(h) = g(a)Df(a)(h) + f(a)Dg(a)(h), \qquad (h \in \mathbb{R}^n).$$

10 pt totaal **Opgave 2** We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + e^{xy}.$$

6 pt (a) Toon aan dat f een lokaal extreem heeft in $(0, 0)$ en bepaal de aard ervan (lokaal minimum of maximum).

4 pt (b) Toon aan dat f geen andere lokale extremen heeft. Hint: beschouw $xD_1f - yD_2f$.

ZOZ

10 pt totaal **Opgave 3** We beschouwen de ellips

$$E := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 2x_2^2 = 16\}.$$

Laat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door

$$f(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2.$$

3 pt (a) Bewijs dat f op E een minimale waarde m aanneemt.

7 pt (b) Toon aan dat f de waarde m aanneemt in precies twee punten $a, b \in E$. Bepaal a, b en m.

10 pt totaal **Opgave 4** Gegeven is een C^1 functie $\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ die voldoet aan

$$x_i D_j \varphi(x) = x_j D_i \varphi(x), \quad (1 \leq i, j \leq 3,\ x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}).$$

Het vectorveld v op $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ wordt gedefinieerd door:

$$v(x) = \varphi(x)x, \quad (x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}).$$

3 pt (a) Toon aan dat v op $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ een unieke primitieve f heeft met $f(1, 0, 0) = 0$.

3 pt (b) Toon aan dat voor elke $r > 0$ geldt:

$$f(r, 0, 0) = \int_1^r s\,\varphi(s, 0, 0)\, ds.$$

In het vervolg mag je gebruiken dat er voor iedere $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ een C^1-kromme $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ bestaat met $\gamma(0) = (\|a\|, 0, 0)$, $\gamma(1) = a$ en $\langle \gamma(t)\,,\, \gamma(t) \rangle = \|a\|^2$. (Het beeld van γ ligt dus op de sfeer $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = \|a\|\}$.)

3 pt (c) Toon aan dat voor een kromme als boven geldt:

$$\int_\gamma v(x) \cdot dx = 0.$$

1 pt (d) Druk de primitieve f uit in een integraal met φ.

Uitwerkingen

Opgave 1

(a) Er geldt dat φ een C^1-afbeelding is, met partiële afgeleiden $D_1\varphi(x) = x_2$ en $D_2\varphi(x) = x_1$. Hieruit volgt dat φ totaal differentieerbaar is, terwijl de afgeleide van φ in x gegeven wordt door

$$D\varphi(x) = (D_1\varphi(x)\ D_2\varphi(x)) = (x_2\ \ x_1).$$

Hieruit volgt dat

$$D\varphi(x)(h) = h_1 D_1\varphi(x) + h_2 D_2\varphi(x) = h_1 x_2 + h_2 x_1.$$

(b) De afgeleide $D(f,g)(a)$ is de lineaire afbeelding $\mathbb{R}^n$ De afbeelding $(f,g) : U \to \mathbb{R}^2$ is totaal differentieerbaar is in a. De afgeleide $D(f,g)(a)$ is een lineaire afbeelding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ gegeven door de Jacobi matrix met twee rijen een n kolommen. De kolommen hebben hoogte 2 en worden gegeven door

$$\begin{pmatrix} D_j f(a) \\ D_j g(a) \end{pmatrix}, \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Hieruit volgt

$$D(f,g)(a) = \begin{pmatrix} D_1 f(a) & \cdots & D_n f(a) \\ D_1 g(a) & \cdots & D_n g(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Df(a) \\ Dg(a) \end{pmatrix}$$

(c) We merken op dat fg gelijk is aan de compositie $\varphi \circ (f,g)$. Immers $fg(x) = f(x)g(x) = \varphi(f(x), g(x)) = [\varphi \circ (f,g)](x)$. Wegens de kettingregel is fg daarom differentieerbaar in a met als afgeleide

$$\begin{aligned} D(fg)(a) &= D\varphi(f(a), g(a)) D(f,g)(a) \\ &= (g(a)\ f(a)) \begin{pmatrix} Df(a) \\ Dg(a) \end{pmatrix} \\ &= g(a)Df(a) + f(a)Dg(a). \end{aligned}$$

Hieruit volgt het gestelde.

Opgave 2

(a) De functie f is C^1 met

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (2x - y + ye^{xy}, -x + 2y + xe^{xy})$$

Hieruit volgt dat $\operatorname{grad} f(0,0) = 0$, dus $(0,0)$ is een stationair punt voor f. Uit de formule voor de gradient blijkt dat deze C^1 is dus f is C^2. Verder is de Hessiaan $H_f(0,0) = (D_i D_j f(0,0))$ gelijk aan

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

De Hessiaan heeft eigenwaarden 2, 2, en is dus positief definiet. De functie f heeft daarom een lokaal minimum in $(0,0)$.

(b) We zullen laten zien dat $(0,0)$ het enige stationaire punt van f is. Daaruit volgt het gestelde. Uit $\operatorname{grad} f(x,y)=0$ volgt

$$xD_1f(x,y)=2x^2-xy+xye^{xy}=0, \quad yD_2f(x,y)-xy+2y^2+xye^{xy}=0.$$

Door de vergelijkingen van elkaar af te trekken vinden we dat $x^2=y^2$ dus $x=\pm y$. Als $x=-y$, dan volgt uit $D_1f(0,0)=0$ dat $3x-xe^{-x^2}=0$, dus

$$x(3-e^{-x^2})=0.$$

Omdat $e^{-x^2}\leq 1<3$ volgt dat $x=0$ dus ook $y=0$.

Als $x=y$ dan volgt uit $D_1f(0,0)=0$ dat $x(1+e^{x^2})=0$ dus $x=0$ en ook $y=0$.

Opgave 3

(a) We definiëren $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ door $g(x)=x_1^2+2x_2^2-16$. Dan is g continu, en $E=g^{-1}(\{0\})$, dus E is gesloten. Uit $x\in E$ volgt $\|x\|^2\leq x_1^2+2x_2^2=16$, dus E is begrensd. Er volgt dat E rij compact is. De continue functie $f|_E$ neemt daarom een absoluut minimum m aan in een punt van E.

(b) De functie g is partieel differentieerbaar en

$$\operatorname{grad} g(x)=(2x_1,4x_2), \qquad (x\in\mathbb{R}^2).$$

Hieraan zien we dat g een C^1 functie is. Voor $x\in E$ geldt $x\neq(0,0)$ dus ook $\operatorname{grad} g(x)\neq(0,0)$. De functie f is partieel differentieerbaar, met gradient

$$\operatorname{grad} f(x)=(2(x_1-1),2x_2).$$

Hieraan zien we dat f een C^1 functie is. Laat de waarde m aangenomen worden in een punt $y\in E$. Volgens de methode van Lagrange bestaat er een $\lambda\in\mathbb{R}$ zo dat $\operatorname{grad} f(y)=\lambda\operatorname{grad} g(y)$, dus

$$2((y_1-1),y_2)=2\lambda(y_1,2y_2).$$

Door vergelijken van de tweede componenten zien we dat $\lambda=1/2$ of $y_2=0$.

In het eerste geval, $\lambda=\frac{1}{2}$, volgt dat $2(y_1-1)=y_1$, dus $y_1=2$. Uit $g(y)=0$ volgt dan dat $y_2^2=\frac{1}{2}(16-y_1^2)=6$. Dus $y=(2,\sqrt{6})$ of $y=(2,-\sqrt{6})$. Deze punten liggen inderdaad op E en er geldt bovendien dat $f(2,\sqrt{6})=f(2,-\sqrt{6})=1+6=7$.

In het tweede geval, $y_2=0$, volgt wegens $y\in E$ dat $y_1^2=16$, dus $y_1=\pm4$. We zien dat in dit geval $y=(4,0)$ of $y=(-4,0$ punten van E zijn, terwijl $f(4,0)=9$ en $f(-4,0)=25$.

Het minimum m kan alleen in de gevonden punten $(2,\sqrt{6}),(2,-\sqrt{6}),(4,0),(-4,0)$ aangenomen worden. De functie f neemt in die punten respectievelijk de waarden $7,7,9$ en 25 aan. Het minimum van deze waarden moet m zijn, dus $m=7$. Deze waarde wordt precies in $a=(2,\sqrt{6})$ en $b=(2,-\sqrt{6})$ aangenomen.

Opgave 4

(a) Het vectorveld v is C^1 op $U := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Voor elk tweetal indices $1 \leq i, j \leq 3$ en alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ geldt dat $v_j(x) = x_j\varphi(x)$ dus,

$$\begin{aligned} D_i v_j(x) &= \delta_{ij}\varphi(x) + x_j D_i\varphi(x) \\ &= \delta_{ji}\varphi(x) + x_i D_j\varphi(x) \\ &= D_j v_i(x) \end{aligned}$$

Hieruit blijkt dat v rotatievrij is op U. Uit het dictaat en de opgaven weten we dat U enkelvoudig samenhangend is. Uit Stelling 5.39 volgt nu dat v een unieke primitieve $f : U \to \mathbb{R}$ heeft met $f(e_1) = 0$.

(b) We beschouwen de kromme $\sigma : [0, 1] \to U$ gedefinieerd door $\sigma(t) = e_1 + t(re_1 - e_1) = (1 + t(r - 1), 0, 0)$. Deze is C^1 en heeft beginpunt $e_1 = (1, 0, 0)$ en eindpunt $(r, 0, 0)$. Derhalve is

$$f(r, 0, 0) = f(r, 0, 0) - f(1, 0, 0) = \int_\sigma v(x) \cdot dx.$$

Aangezien $v(\sigma(t)) = [1 + t(r - 1)]\varphi([1 + t(r - 1)]e_1)e_1$ en $\sigma'(t) = (r - 1)e_1$, geldt $v(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = [1 + t(r - 1)]\varphi([1 + t(r - 1)]e_1)(r - 1)$, dus

$$\int_\sigma v(x) \cdot dx = \int_0^1 [1 + t(r - 1)]\varphi([1 + t(r - 1)]e_1)\ (r - 1)dt$$

Met de subsitutie $s = 1 + t(r - 1)$ blijkt dat de laatste integraal gelijk is aan

$$\int_1^r s\,\varphi(se_1)\ ds = \int_1^r s\,\varphi(s, 0, 0)\ ds$$

Hieruit volgt het gestelde.

(c) Uit $\langle\gamma(t)\,,\,\gamma(t)\rangle = \|a\|^2$ volgt door differentiatie naar t dat

$$2\langle\gamma(t)\,,\,\gamma'(t)\rangle = 0, \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Aangezien $v(\gamma(t)) = \varphi(\gamma(t))\gamma(t)$ volgt $v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$ voor alle $t \in [0, 1]$. Derhalve geldt

$$\int_\gamma v(x) \cdot dx = 0.$$

(d) Uit het feit dat f een primitieve van v is en γ een C^1-kromme, volgt dat

$$\int_\gamma v(x) \cdot dx = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(a) - f(\|a\|, 0, 0) = 0.$$

Combineren we dit met (c) en (b) dan volgt dat

$$f(a) = f(\|a\|, 0, 0) = \int_1^{\|a\|} s\,\varphi(s, 0, 0)\ ds,$$

voor elke $a \in U$.