

Tweede Deeltoets Algoritmiek

3 november 2009, 8.30 – 10.30, Educ-ALFA.

Zet je mobiel uit. Geef bij al je antwoorden een korte, maar duidelijke motivatie. Stel geen vragen over dit tentamen; als je de formulering onduidelijk vindt, vertel dan hoe je de vraag interpreteert en geef je antwoord. Je mag 1 blad met *eigengemaakte* aantekeningen gebruiken.

1. **Approximatie voor TSP.** Het *Handelsreizigersprobleem* of TSP vraagt naar een volgorde voor het bezoeken van een verzameling steden, die de kosten van de rondreis minimaliseert. Als invoer veronderstellen we een *ongerichte, gewogen graaf* $G = (V, E, w)$. (Je hebt misschien een extra aanname over de graaf nodig; benoem die zonodig.)
 - (a) Beschrijf de eisen waaraan een *polynomiaal r -approximatie-algoritme voor TSP* moet voldoen.
 - (b) Veronderstel dat een opspannende boom T , met gewicht $M = \sum_{e \in T} w(e)$ van G bekend is. Beschrijf hoe je hieruit een cykel in G kunt berekenen met een bovengrens op het gewicht daarvan.
 - (c) Laat zien, dat het gewicht van een *Minimal Spanning Tree* in G begrensd is door de lengte van een willekeurige cykel.
 - (d) Beschrijf een approximatie-algoritme voor TSP; wat is de approximatie-ratio?
2. **Kortste Paden.**
 - (a) Welke varianten van het kortstepad-probleem ken je? Welke algoritmen ken je en voor welke varianten zijn ze?
 - (b) Wat is de complexiteit van deze algoritmen?
 - (c) Nu wordt extra gegeven, dat de kantgewichten allemaal uit de verzameling $\{1, 2\}$ komen. Geef een zo efficiënt mogelijk algoritme om een kortst pad van knoop s naar knoop t te berekenen.
3. **Randomisatie.** Gegeven is een array $A[1..n]$ van integers, waarvan bekend is dat er één waarde is die tenminste $n/2$ maal voorkomt, en dat alle andere waarden maar eenmaal voorkomen. Gevraagd wordt, de waarde te bepalen die vaak voorkomt.
 - (a) Beargumenteer, dat een deterministisch algoritme voor dit probleem tenminste lineaire tijd (dwz., $\Theta(n)$) kost.
 - (b) Geef een gerandomiseerd algoritme voor dit probleem met een constante tijdscomplexiteit (dwz., $O(1)$).
 - (c) Is je oplossing een Monte Carlo, Las Vegas, of Sherwood algoritme? Waarom?
 - (d) Bereken de slaagkans en (verwachte) complexiteit van je oplossing.
4. **De Lift.** Een leerkracht komt met een klas van $n > 0$ kinderen, waar kind i een gewicht van a_i kg heeft, bij een lift met draagvermogen M kg. De leerkracht wil de klas vervoeren met een minimaal aantal ritten van de lift. Is het bepalen van het minimale aantal ritten met een polynomiaal algoritme op te lossen?
(Hint: SubsetSum is NPC.)