Algoritmiek: Deeltentamen 2

Dinsdag 11 April 2017, 13:30 – 16:30

LEES DIT EERST

- Je hebt drie uur voor dit deeltentamen.
- Dit deeltentamen heeft 2 bladen en 6 opgaven. Controleer dat je alle opgaven hebt.
- Schrijf op elk van de ingeleverde bladen je naam en studentnummer, en op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen.
- Geef duidelijke antwoorden in helder en correct Nederlands of Engels. Wanneer niet expliciet anders gevraagd, mag je resultaten uit het college gebruiken.
- Als een algoritme wordt gevraagd, dan is het een goed idee om dit algoritme zowel te geven in pseudocode, als een toelichting in woorden te geven.
- Schrijf netjes, en lever overzichtelijk werk in.
- Deel je tijd goed in: sommige opgaven kunnen moeilijker zijn dan andere.

BEGIN TENTAMEN. SUCCES!

Opgave 1 *(0.5 + 0.5 + 0.75 = 1.75 punten)*
In deze opgave bekijken we het algoritme van Kruskal voor het vinden van minimum opspannende bomen in een graaf. Als invoer krijg je een ongerichte graaf $G = (V, E)$ met n knopen en m kanten, en een positieve integer lengte ℓ voor iedere kant in E.

a) Beschrijf en geef pseudo-code voor het algoritme van Kruskal.

b) Welke looptijd heeft het algoritme van Kruskal, en welke datastructuur/datastructuren heb je nodig om deze looptijd te bereiken?

c) Stel dat de lengte ℓ van iedere kant verschillend is. Bewijs dat de graaf één enkele, unieke minimum opspannende boom heeft.

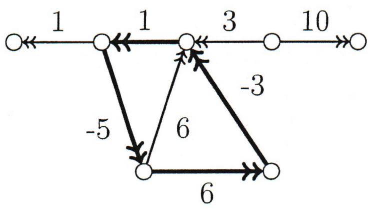
Opgave 2 *(0.5 + (0.5+0.25+0.25) + 0.75 = 2.25 punten)*
In deze opgave praten we over matchings (koppelingen) in ongerichte grafen.

a) Leg uit wat het verschil is tussen een maximale en een maximum matching.

b) Beschrijf en geef pseudo-code voor een efficient algoritme dat een maximale matching in een graaf vindt. Leg kort uit waarom je algoritme correct is, en analyseer de looptijd.

c) Stel G is een ongerichte graaf, en M is een maximale matching in G en N een maximum matching in G. Bewijs dat $|N| \leq 2 \cdot |M|$.

Opgave 3 *(0.75 + 0.5 + 0.25 = 1.25 punten)*
Stel $D = (V, A)$ is een gerichte graaf met n knopen en a pijlen, en $\ell : A \to \mathbb{Z}$ geeft de lengte van iedere pijl als een (positieve of negatieve) integer. Een negatieve cycle is een verzameling knopen $v_1, \ldots, v_n$ zodat $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)$ pijlen in A zijn waarvan de som van de lengtes negatief is. In de figuur op de volgende bladzijde is een negatieve cycle aangegeven met de vetgedrukte pijlen.

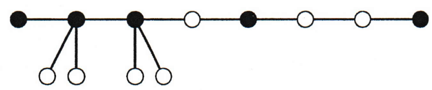


a) Beschrijf en geef pseudo-code voor een efficient algoritme dat beslist of D een negatieve cycle bevat.

b) Leg kort uit waarom je algoritme correct is.

c) Analyseer de looptijd van je algoritme.

Opgave 4 (*0.75 + 1 = 1.75 punten*)
Stel $G = (V, E)$ is een ongerichte graaf. Een verzameling $D \subseteq V$ is een *dominerende verzameling* als voor iedere knoop $v \in V$ geldt: v of tenminste een van de buren van v zit in D. Bijvoorbeeld: de zwarte knopen in de graaf hieronder vormen een dominerende deelverzameling.



Beschouw nu het volgende probleem:

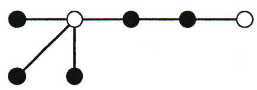
> DOMINATING SET
> **Gegeven:** Ongerichte graaf $G = (V, E)$, integer K.
> **Vraag:** Bestaat er een dominerende verzameling $D \subseteq V$ met $|D| \leq K$?

a) Bewijs dat DOMINATING SET tot de klasse NP behoort.

b) Toon aan dat DOMINATING SET NP-volledig is. Je mag gebruiken dat het volgende probleem NP-volledig is:

> VERTEX COVER
> **Gegeven:** Ongerichte graaf $G = (V, E)$, integer L.
> **Vraag:** Bestaat er een verzameling $X \subseteq V$ met $|X| \leq L$, zodat voor elke kant $vw \in E$ geldt dat $v \in X$ of $w \in X$?

In de figuur hieronder geven de zwarte knopen aan dat de graaf en $L = 5$ een ja-instantie is voor VERTEX COVER.



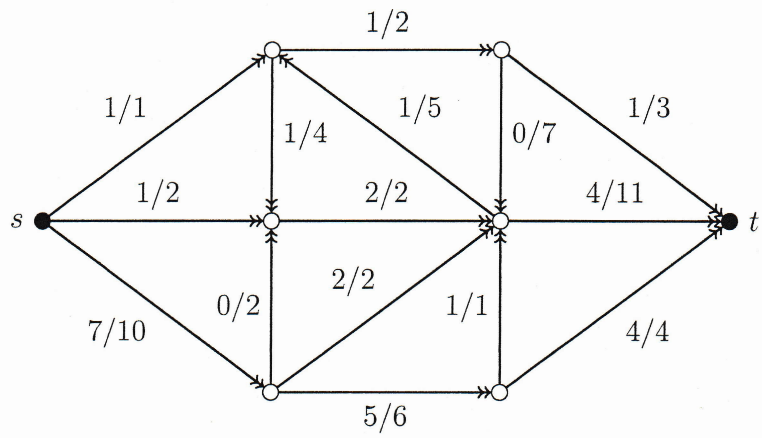
Opgave 5 (*1 + 0.5 + 0.25 = 1.75 punten*)
In een computerspel beweegt de speler zich door een gangenstelsel. Er zijn G gangen en K knooppunten van gangen. Ergens in het gangenstelsel is een schat die de speler wil bemachtigen. Alleen, in sommige gangen staat een monster. Als de speler langs een monster wil, dan breekt er een gevecht uit. Helaas heeft de speler nog maar energie om één monster te verslaan. De vraag aan jou is nu om te bepalen of de speler de schat kan bereiken.

a) Beschrijf en geef pseudo-code voor een algoritme voor dit probleem dat looptijd $O(G+K)$ heeft.

b) Leg kort uit waarom je algoritme correct is.

c) Leg kort uit waarom je algoritme looptijd $O(G+K)$ heeft.

Opgave 6 (*0.25 + 0.5 + 0.5 = 1.25 punten*)
In deze opgave bekijken we het Ford-Fulkerson algoritme. Bekijk de onderstaande gerichte graaf met s–t stroming. Voor iedere pijl is telkens aangegeven de stroming over de pijl en de capaciteit van de pijl, als stroming / capaciteit.



a) Wat is de waarde van de getekende s–t stroming?

b) Teken het rest-netwerk en geef daarin de rest-capaciteiten van alle pijlen aan.

c) Is er een verbeterend pad? Zo ja, geef dit verbeterend pad aan, en teken de nieuwe stroming. Zo nee, geef een minimum s–t snede.

EINDE TENTAMEN. VROLIJK PASEN!