

Algoritmiëk (INFOAL) 1 februari 2005

U heeft twee uur de tijd voor dit tentamen. Schrijf uw naam op alle blaadjes die u inlevert. Bij elk onderdeel staat het aantal punten dat u voor dit onderdeel kunt halen aangegeven. Schrijf duidelijk en helder. Wanneer u een gedeelte van een opgave niet heeft kunnen aantonen, dan mag u dat resultaat toch gebruiken in een later gedeelte van die opgave.

Opgave 1. Vinden van kortste paden (2 punten)

Hieronder zit u nogmaals de code van het Floyd-Warshall algoritme voor het all-pairs shortest paths probleem; deze code bepaalt alleen de afstanden tussen de paren knopen. We nemen aan dat de knopen genummerd zijn $1, 2, \dots, n$, de afstand van i naar j is $\ell(i, j)$.

```
Maak een 2-dimensionale  $n$  bij  $n$  matrix  $D[1 \dots n, 1 \dots n]$ .
for  $i = 1$  to  $n$  do
  for  $j = 1$  to  $n$  do
     $d(i, j) = \ell(i, j)$ 
  for  $k = 1$  to  $n$  do
    for  $i = 1$  to  $n$  do
      for  $j = 1$  to  $n$  do
         $d(i, j) = \min(d(i, j), d(i, k) + d(k, j))$ 
```

Zoals behandeld in het college geeft na afloop voor elke $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $d(i, j)$ de afstand in G van i naar j .

Geef nu een aanpassing/aanvulling van deze pseudocode, zodat ook de *kortste paden* kunnen worden geleverd.

Opgave 2. Las Vegas algoritme (1.5 punten)

Stel ongerichte graaf $G = (V, E)$ is gegeven door middel van de adjacency matrix datastructuur. Stel G heeft $n^2/6$ kanten. Geef een Las Vegas algoritme dat in $O(1)$ verwachte tijd een paar knopen dat door een kant verbonden is vindt. Beargumenteer de tijdgrens.

Opgave 3. Maximum stroming (1.5 punten)

Geef een duidelijke beschrijving, in woorden, van de werking van Ford-Fulkerson algoritme voor het vinden van een maximum stroming tussen knopen s en t in een netwerk.

U hoeft niet de correctheid van het algoritme te bewijzen. Ook hoeft u niet uit te leggen hoe een pad in een graaf gevonden kan worden (dat kan met bijv. DFS), maar natuurlijk wel op welke momenten, tussen welke knopen, en in welke soort graaf.

Opgave 4. Handelsreizigersprobleem (1.5 punten)

We kijken naar het handelsreizigersprobleem (TSP) waar de steden punten op het platte vlak zijn, en de afstanden de ‘gewone’ Euclidische afstanden zijn. Laat zien dat een optimale tour nooit zichzelf kruist. (D.w.z., er zijn geen twee kanten in de tour in het platte vlak die zichzelf kruisen.)

Opgave 5. Graaf algoritmen

(1.5 punten)

Stel we hebben gegeven een gerichte graaf $G = (V, E)$, $n = |V|$, $m = |E|$, en een knoop $v \in V$. Laat zien hoe je in $O(n + m)$ tijd kan testen of de volgende uitspraak voor G waar is of niet:

Voor elke knoop w is er een pad in G van v naar w .

Opgave 6.

(1 + 1 punt)

Een verzameling knopen W is een *onafhankelijke deelverzameling* in een graaf $G = (V, E)$ als voor elk paar knopen $v, w \in W : \{v, w\} \notin E$. Het ONAFHANKELIJKE DEELVERZAMELING probleem is als volgt:

Gegeven: Ongerichte graaf $G = (V, E)$, integer $K \leq |V|$

Gevraagd: Bestaat er een onafhankelijke deelverzameling W in G met $|W| \geq K$?

1. Geef een polynomiale reductie van het ONAFHANKELIJKE DEELVERZAMELING probleem naar het probleem, om te bepalen voor gegeven graaf $G = (V, E)$, en gegeven integer l , of G een klik met minstens l knopen heeft.
2. Hieronder staan twee beweringen. Geef aan van welke van deze twee beweringen we weten dat deze correct is, en geef een bewijs van die bewering.
 - a) Het ONAFHANKELIJKE DEELVERZAMELING probleem is NP-volledig.
 - b) Het ONAFHANKELIJKE DEELVERZAMELING probleem behoort tot de klasse P.