

## Algoritmiek (INFOAL)

### 1 februari 2007

U heeft 2 uur de tijd voor dit tentamen. Schrijf Uw naam op alle blaadjes die U inlevert. Schrijf op het eerste vel het aantal ingeleverde bladen.

Gebruik heldere formuleringen. Schrijf leesbaar. Het gebruik van mobiele telefoons tijdens het tentamen is verboden, en leidt tot onmiddellijke uitsluiting. u mag tijdens het tentamen maximaal 4 kantjes A4 eigen aantekeningen raadplegen. Deze dient U met Uw werk in te leveren, en kan U later weer ophalen.

Elk van de vragen 1, 2, 3, 4a, 4b telt voor twee punten.

Veel succes!

#### Opgave 1: Gerichte acyclische grafen

Beschouw de volgende bewerking.

Laat  $G = (V, A)$  een gerichte acyclische graaf zijn. Er is een  $w \in V$ , zodat voor elke  $v \in V$ ,  $\{v, w\} \notin A$ .

- Is deze bewering waar?
- Bewijs Uw antwoord.

#### Opgave 2: Samenhangende grafen

Bij de betrouwbaarheidsanalyse van netwerken doet zich het volgende probleem voor. Gegeven is een gerichte graaf  $G = (V, A)$  en twee knopen  $v, w \in V$ . Gevraagd wordt: wat is het kleinste aantal kanten dat we uit  $A$  moeten verwijderen, zodat er geen pad in  $G$  is van  $v$  naar  $w$ .

Beargumenteer dat dit probleem in polynomiale tijd kan worden opgelost.

#### Opgave 3. Moeilijk begaanbare wegen

Veel van de wegen op het bedrijfsterrein van een mijnbouw-firma zijn slecht begaanbaar. Er zijn daarbij verschillende gradaties van begaanbaarheid. Er zijn ook verschillende voertuigen, en afhankelijk van het slechtst begaanbare stuk weg op een route kunnen sommige voertuigen wel, of niet gebruikt worden. De firma wil weten voor elke startplek en bestemming welke soort voertuigen nodig zijn. Hiervoor moet een ALL PAIRS BOTTLENECK PATH probleem worden opgelost. In dit probleem is een gerichte graaf  $G = (V, A)$  gegeven, en elke pijl  $a \in A$  heeft een waarde  $b(a) \in \mathbb{N}$ . De *bottleneck waarde* van een pad in  $G$  is de hoogste waarde van een pijl op het pad. (Als we dus een pad van  $v$  naar  $w$  hebben met achtereenvolgens pijlen met waarden 3, 7 en 5, dan is de bottleneck waarde van dit pad 7.) De *bottleneck afstand* van  $v \in V$  naar  $w \in V$  is de kleinste bottleneck waarde van een pad van  $v$  naar  $w$ .

In deze opgave kijken we naar de ALL PAIRS variant. Laat zien dat in  $O(|V|^3)$  tijd we alle bottleneck arstanden, voor alle paren knopen  $v \in V, w \in V, (v \neq w)$  kunnen uitrekenen.

#### Opgave 4. NP-moeilijkheid en Benaderingsalgoritmen

Een muntenhandelaar heeft een hele partij zeventiende-eeuwse munten, die hij in verschillende kavels aan een veiling wil aanbieden. Er zijn  $n$  munten, die waarde  $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{Z}^+$  hebben. Elke munt moet in precies één van de kavels zitten. De totaalwaarde van een kavel moet minstens  $K$  zijn.

Gegeven zijn  $w_1, \dots, w_n, K$ . De muntenhandelaar wil de munten in kavels verdelen zodat er zo veel mogelijk kavels zijn.

(Met andere woorden: de getallen  $w_1, \dots, w_n$  moeten in zo veel mogelijk groepjes verdeeld worden zodat ieder groepje totaal minstens  $K$  is.)

- a) De muntenhandelaar (die VWO Natuur en Techniek gedaan heeft, maar verder geen kennis van de informatica heeft) vraagt U een algoritme voor dit probleem te ontwerpen, en vertelt: “Ik heb gehoord dat dit probleem NP-moeilijk is, maar ik weet niet wat dat betekent”.

Hoe legt U e.e.a. uit aan de muntenhandelaar. (Maximaal 20 regels.)

- b) Geef een approximatie-algoritme voor het probleem, dat tijd, polynomiaal in  $n$  gebruikt, en dat minstens de helft van het optimale aantal kavels geeft.
- Geef het algoritme, in woorden of pseudocode.
  - Bewijs dat Uw algoritme minstens de helft van het optimale aantal kavels oplevert.