

Logica voor Informatica
21 December 2010

VOORBLAD
Toets 1

Tijd 13.30-16.30

Aanwijzingen

- De toets is *gesloten boek*: je mag geen boek, lesmateriaal, of college aantekeningen gebruiken en ook geen uitwerkingen of bladen met hints van werkcollegeopgaven.
- Je mag wel één A4-tje met eigen aantekeningen gebruiken. Dit A4-tje mag aan beide zijden beschreven zijn.
- Er zijn 5 opgaven, elk met een a- en een b-onderdeel. Elk onderdeel telt voor 1 punt. De moeilijkheidsgraad van de onderdelen is niet altijd gelijk en kan dus variëren.
- Laptops, iPads, (grafische) rekenmachines, mobiele telefoons, en alle andere soortgelijke apparaten en gadgets dienen *niet* gebruikt en in de tas te blijven.
- Beantwoord opgaven in de volgorde die jij wilt.
- Beantwoord elke opgave op een APART vel i.v.m. het nakijken, zie hieronder.

Aanwijzingen bij opschrijven van antwoorden

- Maak van het tentamenpapier een aantal APARTE VELLEN:
 - scheur elk dubbelvel tentamenpapier door op de vouw in het midden
 - elke dubbelvel tentamenpapier geeft dus 2 aparte vellen
 - zorg dat je zo ten minste 5 aparte vellen krijgt, gebruik de rest als kladpapier.
- Beantwoord elke opgave op een APART vel.
- Schrijf leesbaar en niet met potlood.
- Schrijf op ieder vel dat je inlevert je **naam**.

VUL HET ONDERSTAANDE IN EN LEVER MET DE OPGAVEN IN:

Naam:

Studentnummer:

Nummer werkcollegegroep:

Omcirkel welke opgaven je inlevert: 1 2 3 4 5

Wat lever je in: dit voorblad en ... aparte vellen.

Lever dit voorblad ingevuld in, samen met de opgaven die je inlevert.

Opgave 1 (Verzamelingen en functies)

1.a Laat X en Y twee verzamelingen zijn. Wanneer heet een afbeelding $f : X \rightarrow Y$ een bijectie (of ‘bijectieve afbeelding’)?

1.b Zij A de verzameling van alle totale functies $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ met de eigenschap dat $f(0) = 0$. Toon aan dat A niet aftelbaar (Engels: ‘non-denumerable’) is.

Opgave 2 (Berekenbaarheid)

2.a Wanneer heet een verzameling X met $X \subseteq \mathbb{N}$ beslisbaar (Engels: ‘recursive’)?

2.b Zij A weer de verzameling van alle totale functies $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ met de eigenschap dat $f(0) = 0$. Zijn alle functies $f \in A$ berekenbaar (Engels: ‘computable’)? Verklaar.

Opgave 3 (Propositielogica)

3.a Bepaal voor elk van de volgende formules of deze een tautologie, een contingentie of een contradictie is. Geef steeds een duidelijke verklaring.

- $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \rightarrow p$
- $((p \rightarrow (q \vee \neg p)) \rightarrow (p \rightarrow q))$
- $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$

3.b Toon aan dat $(\varphi \rightarrow (\psi \wedge \varphi))$ logisch equivalent is met $(\neg\varphi \vee \psi)$. Laat dit zien door gebruik van standaardequivalenties (distributieve wetten etc).

Opgave 4 (Propositielogica)

4.a Welke van de volgende beweringen gelden? Geef steeds een duidelijke verklaring.

- $\{((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi)\} \models ((\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi))$
- $\{((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi)\} \models ((\varphi \wedge \neg\psi) \vee ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge \chi))$

4.b Geef een disjunctieve én een conjunctieve normaalvorm voor de volgende formule: $((p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s))$. Laat zien hoe u aan beide komt.

Opgave 5 (Afleidingen en consistentie)

5.a Toon binnen de axiomatic van de propositielogica aan dat

- $\{(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)), (\varphi \rightarrow \psi)\} \vdash (\varphi \rightarrow \chi)$

Laat dit dus zien zonder gebruik van waarheidstabellen.

5.b Is de volgende bewering over de propositielogica juist? Geef een duidelijke uitleg.

- Voor elke verzameling formules Σ en formule φ is óf $\Sigma \cup \{\varphi\}$ óf $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ consistent (dus, een van de twee maar niet beide tegelijk).

Elke opgave op een APART vel. Je naam op elk ingeleverd vel. Lever ook het voorblad in.