Open vragen

Antwoorden op open vragen worden ingevuld op de antwoordbladen, elk antwoord op een apart blad.

Gelinieerde vellen fungeren als kladpapier en worden niet ingenomen.

Meerkeuzevragen

Elke juist beantwoorde vraag levert twee punten op. Bij elke meerkeuzevraag is steeds precies één antwoord het juiste. Wel kunnen andere antwoorden "bijna juist" of "deels juist" zijn. Mochten er meerdere goede antwoorden zijn, dan geldt het beste antwoord.

Omdat er verschillende versies van de opgaven bestaan, correspondeert de volgorde van de opgaven niet altijd met de volgorde van de stof zoals die behandeld is in de colleges.

1. In de loop van de geschiedenis van de wiskunde en de informatica was van een aantal problemen niet duidelijk of deze beslisbaar waren. Hoeveel problemen uit deze lijst bleken uiteindelijk beslisbaar?

   i) Hilbert's 10e probleem.
   ii) Het geldigheidsprobleem in de propositielogica.
   iii) Het geldigheidsprobleem in de predikatenlogica.
   iv) Het stop-probleem (the halting-problem).
   v) Church's probleem of twee λ-expressies equivalent zijn.
   vi) Post's correspondentie-probleem.
   vii) Wang's betegelingsprobleem.

   (a) 0.
   (b) 1.
   (c) 2.
   (d) Het goede antwoord staat er niet bij.

2. Hilbert wordt, als wiskundige, aangemerkt als

   (a) Constructivist.
   (b) Formalist.
   (c) Intuïtionist.
   (d) Realist.

3. Hilbert's 10e probleem kan als volgt worden geformuleerd.

   (a) Is er, voor elk formeel systeem, een algoritme dat voor elke uitspraak in dat formele systeem kan bepalen of deze uitspraak juist is?
   (b) Is er een algoritme dat voor elk formeel systeem, en uitspraak in dat formele systeem, kan bepalen of deze uitspraak juist is?
   (c) Is er, voor elke meer-variabelige veelterm (met geheeltallige coëfficiënten), een algoritme dat kan bepalen of deze veelterm geheeltallige oplossingen bezit, en zo ja hoeveel?
   (d) Is er een algoritme dat voor elke meer-variabelige veelterm (met geheeltallige coëfficiënten) kan bepalen of deze veelterm geheeltallige oplossingen bezit, en zo ja hoeveel?

4. Twee van de volgende noties zijn equivalent.

   i) Berekenbaarheid.
   ii) Opsombaarheid.
   iii) Semi-beslisbaarheid.
   iv) Beslisbaarheid.

   (a) *i)* en *ii)*.
   (b) *ii)* en *iii)*.
   (c) *iii)* en *iv)*.
   (d) Het goede antwoord staat er niet bij.

5. • Een opsombare verzameling is altijd aftelbaar.
   • Een complementair-opsombare verzameling is altijd overaftelbaar.
   • Een verzameling die opsombaar én complementair-opsombaar is, is beslisbaar.
   • Een verzameling die beslisbaar is, is zowel opsombaar als complementair-opsombaar.

   Hoeveel van deze uitspraken zijn waar?

   (a) 1.
   (b) 2.
   (c) 3.
   (d) Het goede antwoord staat er niet bij.

6. Zij X en Y beslisbare verzamelingen van natuurlijke getallen. Welke van de volgende verzamelingen zijn dan in het algemeen **niet** meer beslisbaar?

   i) $X \cup Y$.
   ii) $X \cap Y$.
   iii) $X \times Y$.
   iv) $X \backslash Y$.
   v) X^C (complement).

   (a) *iii)* en *iv)*.
   (b) *iii)* en *v)*.
   (c) *iv)* en *v)*.
   (d) Het goede antwoord staat er niet bij.

7. Zij X en Y opsombare verzamelingen van natuurlijke getallen. Welke van de volgende verzamelingen zijn dan in het algemeen **niet** meer opsombaar?

   i) $X \cup Y$.
   ii) $X \cap Y$.
   iii) $X \times Y$.
   iv) $X \backslash Y$.
   v) X^C (complement).

   (a) *iii)* en *iv)*.
   (b) *iii)* en *v)*.
   (c) *iv)* en *v)*.
   (d) Het goede antwoord staat er niet bij.

8. Een *lineaire congruentie generator* (LCG)

$$x_i = \begin{cases} s & \text{als } i = 0, \\ ax_{i-1} + c (\text{mod } m) & \text{anders.} \end{cases}$$

is één van de oudste manieren om zogenaamde pseudo-toevalsgetallen te genereren. De constanten s (seed), a, c en m (modulus) moeten zorgvuldig worden gekozen, omdat er anders toch weer te veel regelmatigheid in de gegenereerde getallen zitten. Bijna alle programmeertalen bezitten een ingebouwde pseudo-toevalsgenerator, P, die gebaseerd is op een lineaire congruentie generator. Beschouw de volgende beweringen.

i) Het bereik van P is aftelbaar.

ii) Het bereik van P is opsombaar.

Welke beweringen zijn waar?

(a) Geen enkele.
(b) Alleen *i)*.
(c) Alleen *ii)*.
(d) Beiden.

9. Hieronder volgt een onware stelling gevolgd door een fout bewijs.

Stelling: iedere berekenbare functie $f : N \to N$ kan worden uitgebreid naar een totale berekenbare functie , dat wil zeggen, naar een berekenbare functie $f' : N \to N$ die op alle $n \in N$ gedefinieerd is.

Bewijs: stel f wordt berekend door $j/1$. Schrijf nu het volgende programma $j'/1$ dat voor iedere n een waarde $f'(n)$ als volgt berekent:

j': Stel n is gegeven. Geef n aan j.
– Als j stopt op n met resultaat $f(n)$, retourneer $f(n)$.
– Als j niet stopt op n, retourneer 0.

Kun je aangeven wat er fout gaat in het bewijs?

(a) Bij een berekenbare functie $f : N \to N$ kan niet altijd een implementatie $j/1$ worden gevonden.
(b) Bovenstaand voorschrift garandeert niet dat $f'(n) = f(n)$ als $f \downarrow n$.
(c) Het is verkeerd iedere keer weer 0 terug te geven als $j/1$ niet stopt op n.
(d) Het is onmogelijk altijd te bepalen of $j/1$ stopt op n.

10. Bij het vak imperatief programmeren wordt een zogenaamde fraude-checker ingezet. We bekijken een inleveropgave waarbij de opdracht is 100 mp3-bestanden volautomatisch (zonder menselijk ingrijpen) te taggen.

– Twee Java-programma's *lijken op elkaar* als, na weghaling van letters en cijfers, de langst gemeenschappelijke deelstring van deze twee programma's langer is dan 75% van de langst gemeenschappelijke deelstringen van alle ingeleverde Java-programmaparen.

– Twee Java-programma's *vertonen hetzelfde gedrag* als beiden dezelfde output geven op de door de prakticumleiding verstrekte input (en beiden stoppen of beiden niet stoppen).

Welke van de volgende vraagstukken zijn beslisbaar?

i) Bepaal of twee willekeurige Java-programma's op elkaar lijken.

ii) Bepaal of twee willekeurige Java-programma's zich hetzelfde gedragen.

(a) Beide niet.
(b) Alleen *i)*.
(c) Alleen *ii)*.
(d) Zowel *i)* als *ii)*.

11. Beschouw de volgende beweringen over de Church-Turing these.

i) Deze stelt dat er een klasse van berekeningsmechanismen is op N^N, zó dat de rekenkracht van alle elementen uit die klasse minstens zo sterk is als de rekenkracht van andere berekeningsmechanismen op N^N.

ii) Deze stelt dat, wat wij intuïtief onder (effectieve) berekenbaarheid verstaan, wordt vertegenwoordigd door een klasse van berekeningsmechanismen op N^N, zó dat de rekenkracht van alle elementen uit die klasse minstens zo sterk is als de rekenkracht van andere berekeningsmechanismen op N^N.

iii) Deze is waar en reeds bewezen.

iv) Deze is waar maar nog niet bewezen.

v) Deze kan niet worden bewezen.

Welke uitspraken zijn waar?

(a) *i)* en *iii)*.
(b) *ii)* en *iv)*.
(c) *ii)* en *v)*.
(d) Het goede antwoord staat er niet bij.

12. De prioriteit van logische connectieven is als volgt (van sterke binding naar zwakke binding):

(a) 1: negatie; 2: conjunctie en disjunctie; 3: implicatie en bi-implicatie; 4: kwantoren.
(b) 1: kwantoren; 2: implicatie en bi-implicatie; 3: conjunctie en disjunctie; 4: negatie.
(c) 1: kwantoren; 2: negatie; 3: conjunctie en disjunctie; 4: implicatie en bi-implicatie.
(d) 1: implicatie en bi-implicatie; 2: conjunctie en disjunctie; 3: negatie; 4: kwantoren.

13. *i)* FOR $\cap$ TER $= \emptyset$.

ii) CON $\cup$ VAR $\subseteq$ TER.

Welke uitspraken zijn waar?

(a) Geen van beiden.
(b) *i)*.
(c) *ii)*.
(d) Beiden.

14. Een zo kort mogelijke schrijfwijze (vanzelfsprekend met behoud van logische equivalentie) voor

$$\forall x(\exists y[(\neg P(x,y)) \rightarrow (Q(x,y) \wedge R)])$$

is:

(a) $\forall x \exists y(\neg Pxy \rightarrow Qxy \wedge R)$

(b) $\forall x \exists y(\neg Pxy \rightarrow (Qxy \wedge R))$

(c) $\forall x \exists y((\neg Pxy \rightarrow Qxy) \wedge R)$

(d) $\forall x \exists y \neg Pxy \rightarrow (Qxy \wedge R)$

15. Welke van de volgende bi-implicaties zijn geldig?

i) $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow \forall xA \wedge \forall xB$

ii) $\exists x(A \wedge B) \leftrightarrow \exists xA \wedge \exists xB$

iii) $\forall xA \vee \forall xB \leftrightarrow \forall x(A \vee B)$

iv) $\exists x(A \vee B) \leftrightarrow \exists xA \vee \exists xB$

v) $\forall x(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\forall xA \rightarrow \forall xB)$

vi) $(\exists xA \rightarrow \exists xB) \leftrightarrow \exists x(A \rightarrow B)$

(a) *i)* en *iv)*.

(b) *ii)* en *v)*.

(c) *iii)* en *vi)*.

(d) Het goede antwoord staat er niet bij.

16. Welke van de volgende expressies behoren tot de object-taal van de predikatenlogica?

i) $\forall x_1 P_3(x_1) \rightarrow P_3(c_7)$.

ii) $\forall x_1 P_3(x_1) \models P_3(c_7)$.

(a) Geen van beiden, i.e., beiden behoren tot de meta-taal.

(b) Alleen *i)*. Expressie *ii)* behoort tot de meta-taal.

(c) Alleen *ii)*. Expressie *i)* behoort tot de meta-taal.

(d) Beiden.

17. Onder welke voorwaarde gelden de volgende equivalenties?

- $(\forall x\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \wedge \psi)$
- $(\psi \wedge \forall x\varphi) \leftrightarrow \forall x(\psi \wedge \varphi)$
- $(\exists x\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \wedge \psi)$
- $(\psi \wedge \exists x\varphi) \leftrightarrow \exists x(\psi \wedge \varphi)$
- ...

(a) De variabele x mag niet vrij voorkomen in φ.

(b) De variabele x mag niet vrij voorkomen in ψ.

(c) De variabele x mag niet vrij voorkomen in φ en ψ.

(d) Het goede antwoord staat er niet bij.

18. Bekijk de volgende uitspraken:

i) Er bestaat een (gezond en volledig) bewijssysteem voor de predikatenlogica.

ii) Geldigheid in predikatenlogica is beslisbaar.

Welke uitspraken zijn waar?

(a) Geen van beiden.

(b) Alleen *i)*.

(c) Alleen *ii)*.

(d) Beide uitspraken zijn waar.

19. Marieke probeert een bewijs van

$$\exists z(Pz \wedge Qz) \models \exists xPx \wedge \exists yQy$$

op te schrijven. Dit verloopt als volgt.

" **Bewijs:** Stel $I, v \models \exists z(Pz \wedge Qz)$.

- Dus is er een $w =_z v$, zó dat $I, w \models Pz \wedge Qz$.
- Dus is er een $w =_z v$, zó dat $I, w \models Pz$ en $I, w \models Qz$.
- Dus
  - is er een $w_1 =_x v$, zó dat $I, w_1 \models Px$, en
  - is er een $w_2 =_y v$, zó dat $I, w_2 \models Qy$.
- Dus $I, v \models \exists xPx$ en $I, v \models \exists yQy$.
- Dus $I, v \models \exists xPx \wedge \exists yQy$. "

We tellen vijf gevolgtrekkingen. Hoeveel van deze gevolgtrekkingen zijn correct?

(a) Alle vijf.

(b) Vier.

(c) Drie.

(d) Minder dan drie.

20.
- Een geskolemiseerde formule bevat geen existentiële kwantoren.
- Een geskolemiseerde formule bevat (altijd) functiesymbolen of constanten.
- Een geskolemiseerde formule is (altijd) logisch equivalent met de oorspronkelijke formule.
- Buiten het hernoemen van gekwantificeerde variabelen (wat op meerdere manieren kan) is een formule slechts op één manier te skolemiseren.

Hoeveel van deze uitspraken zijn waar?

(a) Eén.

(b) Twee.

(c) Drie.

(d) Het goede antwoord staat er niet bij.

Einde van de meerkeuzevragen. Heb je je antwoorden gecontroleerd? Dit tentamen bevat ook nog open vragen.

Antwoorden na 30 januari op de site, uitslag na 8 februari.

Vergeet je niet de onderwijsenquete in te vullen? Dank voor je deelname en tot ziens.