Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB222 werd in 2008-2009 gegeven door Prof. Dr. F. Beukers.

Tweede deeltentamen Ringen en Galoistheorie (WISB222)
18 juni 2009

Aanwijzing: ook al heb je een onderdeel van een opgave niet, dan mag je in de eropvolgende delen gebruik maken van het resultaat van dat onderdeel.
Geef een goede onderbouwing van je antwoorden.

Opgave 1

Zijn de volgende uitspraken goed of fout? Verklaar je antwoord.

a) Stel L/K is een Galoisuitbreiding en M een tussenlichaam, dat wil zeggen $K \subset M \subset L$. Dan is L/M een Galoisuitbreiding. *(5 punten)*

b) Stel L/K is een Galoisuitbreiding en M een tussenlichaam, dus $K \subset M \subset L$. Dan is M/K een Galoisuitbreiding. *(5 punten)*

c) Stel L/K is een eindige uitbreiding en $\alpha, \beta \in L$ met $\alpha \neq \beta$. Dan is de graad $[K(\alpha, \beta : K]$ gelijk aan het product van de graden van α en β over K. *(5 punten)*

d) Stel L/K is een Galoisuitbreiding en $\alpha \in L$. Dan is de graad van α over K gelijk aan het aantal verschillende beelden van α onder de Galoisgroep $\mathrm{Gal}(L/K)$. *(5 punten)*

e) Zij L/K een eindige uitbreiding en m_1, M_2 twee tussenlichamen die normaal zijn over K. Zij $M_1 \cdot M_2$ het kleinste deellichaam van L dat zowel M_1 als M_2 bevat. Dan is $M_1 \cdot M_2$ ook normaal over K. *(5 punten)*

Opgave 2

a) Stel $\alpha \in \mathbb{Z}$ en stel dat α geen kwadraat van een getal in $\mathbb{Z}$ is. Dan heeft $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$ graad 2 over $\mathbb{Q}$. De Galoisgroep $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{a})/\mathbb{Q})$ bestaat uit twee elementen: $\{id, \sigma\}$.
Stel $b \in \mathbb{Z}$ en $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}(\sqrt{a})$. Bewijs dat b òfwel zelf een kwadraat is, òf dat ab een kwadraat is.)
(*Hint:* stel $\sqrt{b} = \alpha + \beta\sqrt{a}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$). *(7 punten)*

b) Bewijs dat $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ een Galoisuitbreiding van graad 4 over $\mathbb{Q}$ is. *(5 punten)*

c) Bepaal de Galoisgroep en alle deellichamen van $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$. *(7 punten)*

d) Bewijs met behulp van de voorgaande onderdelen dat $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. *(6 punten)*

e) Bewijs dat $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ graad 8 over $\mathbb{Q}$ heeft. *(5 punten)*

Z.O.Z.

Opgave 3

Beschouww het polynoom $f = X^8 + t^4 \in \mathbb{Q}(t)[X]$ en zij L het splijtlichaam van f over het grondlichaam $\mathbb{Q}(t)$. Er is gegeven dat $X^8 + t^4$ irreducibel in $\mathbb{Q}(t)[X]$ is. Zij α een nulpunt van f in L.

a) Laat zien dat t/α en α^3/t ook nulpunten van f zijn. *(3 punten)*

b) Bepaal alle nulpunten van f in termen van t en α. *(7 punten)*

c) Laat zien dat $L/\mathbb{Q}(t)$ een Galoisuitbreiding van graad 8 is. *(3 punten)*

d) Zij $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(t))$ het element zó dat $\sigma(\alpha) = \alpha^3/t$. Bepaal de orde van de σ in de Galoisgroep. *(7 punten)*

e) Kies nu een element $\tau \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(t))$ dat samen met σ de Galoisgroep voortbrengt. *(5 punten)*

f) Bepaal de Galoisgroep van $L/\mathbb{Q}(t)$. *(5 punten)*

g) Bepaal alle tussenlichamen van $L/\mathbb{Q}(t)$ van graad 2 over $\mathbb{Q}(t)$. *(5 punten)*