Herkansing Ringen en Galoistheorie, 22-8-2008, 14-17 uur

Dit is een open boek tentamen. Dat wil zeggen, de dictaten mogen gebruikt worden maar geen andere zaken zoals aantekeningen, uitwerkingen, etc.

Geef een goede onderbouwing van je antwoorden. Succes!

1. (*35 punten, 5 per onderdeel*) Zijn de volgende uitspraken goed of fout? Verklaar je antwoord.

   (a) De ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ heeft een oneindige éénhedengroep.

   (b) De ring $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ is een lichaam.

   (c) Het hoofdideaal $(X+1)$ in $\mathbb{R}[X,Y]$ is een priemideaal.

   (d) Het hoofdideaal $(X+1)$ in $\mathbb{R}[X,Y]$ is een maximaal ideaal.

   (e) Het lichaam $\mathbb{F}_{81}$ heeft graad 3 over $\mathbb{F}_{27}$.

   (f) Stel L/K is een Galoisuitbreiding en M een tussenlichaam, dat wil zeggen $K \subset M \subset L$. Dan is M/K een Galoisuitbreiding.

   (g) Zij L/K een eindige uitbreiding en M_1, M_2 twee tussenlichamen die normaal zijn over K. Zij $M_1 \cdot M_2$ het kleinste deellichaam van L dat zowel M_1 als M_2 bevat. Dan is $M_1 \cdot M_2$ ook normaal over K.

2. (*30 pt*) We bekijken de ring $\mathbb{Z}[X]/I$ met het ideaal $I = (6, X^2 - 7)$.

   (a) (*8 pt*) Laat zien dat

   $$\mathbb{Z}[X]/I \simeq \mathbb{Z}[X]/(2, X^2-7) \times \mathbb{Z}[X]/(3, X^2-7).$$

   (b) (*6 pt*) Laat zien dat

   $$\mathbb{Z}[X]/I \simeq \mathbb{F}_2[X]/((X+1)^2) \times \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3.$$

   (c) (*6 pt*) Hoeveel elementen bevat $\mathbb{Z}[X]/I$?

   (d) (*5 pt*) Vindt een priemideaal van $\mathbb{Z}[X]$ dat $X^2 - 7$ bevat.

   (e) (*5 pt*) Vindt een maximaal ideaal van $\mathbb{Z}[X]$ dat $X^2 - 7$ bevat.

ZOZ

3. (*35 punten*) Beschouw het polynoom $f = X^4 - 2X^2 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ in de variabelen X en zij L het splijtlichaam van f over het grondlichaam $\mathbb{Q}$.

   (a) (*5 pt*) Toon aan dat f irreducibel is.

   (b) (*5 pt*) Zij α een nulpunt van f. Laat zien dat $\sqrt{2}/\alpha$ en $-\alpha$ ook nulpunten zijn. Bepaal vervolgens alle andere nulpunten van f in termen van α.

   (c) (*5 pt*) Laat zien dat $\sqrt{2} \in L$ en dat $L = \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{2})$.

   (d) (*5 pt*) Er is gegeven dat $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(\alpha)$. Bepaal de graad $[L : \mathbb{Q}]$.

   (e) (*5 pt*) Gegeven is dat er een element σ van de Galoisgroep $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ is met

   $$\sigma(\alpha) = \sqrt{2}/\alpha, \quad \sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}.$$

   Laat zien dat σ een element van orde 4 is.

   (f) (*5 pt*) Wat is de graad van deellichaam van L dat via de Galois-correspondentie correspondeert met de ondergroep voortgebracht door σ?

   (g) (*5 pt*) Bepaal het zojuist genoemde deellichaam.