Tentamen Ringen en Galois-theorie 2015

I.v.m. nakijklogistiek: begin elke opgave op een nieuw vel.

Opgave 1. Zij R een commutatieve ring met 1. Zij $I_1, I_2 \subset R$ idealen en definieer het ideaal $I := I_1 I_2 = \{\sum_{i=1}^n x_i y_i \ : \ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \ x_i \in I_1, \ y_i \in I_2\}$. Neem aan dat $I_1 + I_2 := \{x + y \ : \ x \in I_1, \ y \in I_2\} = R$. Beschouw de quotientringen R/I, R/I_1, R/I_2. Dan is $(R/I_1) \times (R/I_2)$ een ring onder componentsgewijs optellen en vermenigvuldigen, $(\overline{x_1}, \overline{y_1}) + (\overline{x_2}, \overline{y_2}) := (\overline{x_1} + \overline{x_2}, \overline{y_1} + \overline{y_2})$ en evenzo voor vermenigvuldiging.

(a) (**3/4 punt**) Definieer de afbeelding $\phi : R/I \to (R/I_1) \times (R/I_2)$, $\overline{x} \mapsto (\overline{x}, \overline{x})$ (of in alternatieve notatie $x + I \mapsto (x + I_1, x + I_2)$). Bewijs dat ϕ een welgedefinieerd ringhomomorfisme is.

(b) (**3/4 punt**) Bewijs dat ϕ surjectief is. *Hint: Neem* $(\overline{x}, \overline{y}) \in (R/I_1) \times (R/I_2)$ *en gebruik* $x - y \in R = I_1 + I_2$.

(c) (**1 punt**) Bewijs dat ϕ injectief is. *Hint: Gebruik* $1 \in R = I_1 + I_2$.

Opgave 2. Zij F een willekeurig lichaam.

(a) (**1 punt**) Zij $f(x) \in F[x]$ met $\deg(f) > 0$. Zij y een andere variabele. Bewijs dat er een $c(x, y) \in F(y)[x]$ bestaat, zodat $f(x) - f(y) = c(x, y)(x - y)$. (Het is zelfs vrij makkelijk in te zien dat $c(x, y) \in F[x, y]$, maar dit wordt niet gevraagd.)

(b) (**1 punt**) Zij $f(y) \in F[y]$ met $\deg(f) > 0$ en $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Beschouw $x^n + f(y) \in F[x, y]$. Stel er is een $\alpha \in F$ zodanig dat $f(\alpha) = 0$ en $f'(\alpha) \neq 0$. Bewijs dat $x^n + f(y)$ irreducibel is in $F[x, y]$.

(c) (**1/2 punt**) Is $x^3 + y^3 + 1$ altijd irreducibel in $F[x, y]$? Bewijs je antwoord.

Opgave 3. (**5/2 punt**) Zij $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Bereken de graad van het splijtlichaam van f over $\mathbb{Q}$ en vindt een primitief element voor dit splijtlichaam. Bereken de Galois-groep van f over $\mathbb{Q}$. Bereken alle ondergroepen en bijbehorende tussenlichamen. Bewijs je antwoorden. *Hint:* $\pm i$ *zijn wortels. De identiteit* $e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ *kan handig zijn.*

Opgave 4. Zij F het eindige lichaam met q elementen en karakteristiek p (priem). Zij $f(x) \in F[x]$ irreducibel van graad $m > 0$. Zij $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

(a) (**1/2 punt**) Stel α is een wortel van f in een lichaamsuitbreiding van F. Bewijs dat $f(x)$ splijt over $F(\alpha)$.

(b) (**3/4 punt**) Stel $f \mid x^{q^n} - x$. Bewijs dat $m \mid n$.

(c) (**3/4 punt**) Stel $m \mid n$. Bewijs dat $f \mid x^{q^n} - x$. *Hint: Gebruik het volgende feit uit de colleges: als* K, L *eindige lichamen zijn die* F *bevatten en hetzelfde aantal elementen hebben, dan zijn* K *en* L F*-isomorf.*

(d) (**1/2 punt**) Stel $f \in \mathbb{F}_p[x]$ is irreducibel van graad $p_1 p_2$, waar p_1, p_2 verschillende priemgetallen zijn. Zij F het lichaam met p^{p_1} elementen. Bewijs dat f gelijk is aan het product van in p_1 verschillende irreducibele veeltermen van graad p_2 in $F[x]$.