Hertentamen Ringen en Galois-theorie 2015

I.v.m. nakijklogistiek: begin elke opgave op een nieuw vel.

Opgave 1. Zij $R \neq \{0\}$ een commutatieve ring met 1. Definieer het Jacobson-radicaal $J(R)$ als de doorsnede van alle maximale idealen van R.

(a) (**3/4 punt**) Zij $x \in R$, x is geen eenheid. Bewijs dat x bevat is in een maximaal ideaal. *Hint: Je mag gebruiken dat we in een inleveropgave hebben bewezen dat ieder ideaal $I \subset R$, $I \neq R$ bevat is in een maximaal ideaal.*

(b) (**3/4 punt**) Zij $x \in J(R)$. Bewijs dat $1 - xy$ een eenheid is voor alle $y \in R$. *Hint: Stel $1 - xy$ is geen eenheid. Gebruik (a).*

(c) (**1 punt**) Stel $x \in R$ heeft de eigenschap dat $1 - xy$ een eenheid is voor alle $y \in R$. Bewijs dat $x \in J(R)$. *Hint: Stel $x \notin J(R)$. Dan is er een maximaal ideaal $M \subset R$ zodanig dat $x \notin M$. Beschouw het ideaal $M + (x)$, waar (x) het ideaal voortgebracht door x aanduidt.*

Opgave 2. Beantwoord de volgende vragen. Bewijs je antwoorden.

(a) (**1/2 punt**) Is $x^{100} + 25x^{50} + 30$ irreducibel over $\mathbb{Z}[x]$?

(b) (**1/2 punt**) Is $x^7 - x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ irreducibel over $\mathbb{R}[x]$?

(c) (**3/4 punt**) Is $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 3$ irreducibel over $\mathbb{Z}[x]$? *Hint: Schrijf dit als $f(x + k)$ met $f(x) = x^4 + 2$.*

(d) (**3/4 punt**) Is $x^4 + x^3 + 1$ irreducibel over $\mathbb{Z}_2[x]$?

Opgave 3. (**5/2 punt**) Zij $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Vind het splijtlichaam en de Galois-groep van f over $\mathbb{Q}$. Bewijs dat er slechts één niet-triviaal tussenlichaam is. Geef een voortbrenger en minimale veelterm over $\mathbb{Q}$ voor dit tussenlichaam. *Hint: Zij $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$. Dan $\zeta + \zeta^4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.*

Opgave 4. Zij F het eindige lichaam met q elementen en karakteristiek p (priem). Zij E/F een eindige lichaamsuitbreiding met q^m elementen ($m > 0$).

(a) (**1 punt**) Beschouw de afbeelding $\phi : E \to E$, $\phi(x) = x^q$. Bewijs dat ϕ een F-automorfisme is. (Je mag hier *niet* verwijzen naar de huiswerkopgave waarin je dit bewezen hebt.)

(b) (**3/4 punt**) Bewijs dat E/F een eindige Galois-uitbreiding is. Zij $\langle\phi\rangle \leq \mathrm{Gal}(E/F)$ de deelgroep voortgebracht door ϕ. Bewijs dat $E^{\langle\phi\rangle} = F$. Hier duidt $E^{\langle\phi\rangle}$ het fixlichaam aan.

(c) (**3/4 punt**) Bewijs dat $\mathrm{Gal}(E/F) \cong \mathbb{Z}_m$.