Opgave 1.
(a) Zij $x \in R$ geen eenheid. Dan $(x) \neq R$, want anders $1 \in (x)$ en dan is er een $y \in R$ zodat $1 = xy$ (**1/2 punt**). Derhalve is (x) (en dus x) bevat in een maximaal ideaal vanwege de hint (**1/4 punt**).
(b) Stel $x \in J(R)$ en $y \in R$. Stel $1 - xy$ is geen eenheid, dan $1 - xy \in M$ voor een maximaal ideaal $M \subset R$ vanwege (a) (**1/4 punt**). Maar ook $x \in M$ en dus $1 \in M$. Tegenspraak (**1/2 punt**).
(c) Stel $x \in R$ en $1 - xy$ is een eenheid voor alle $y \in R$. Stel er is een maximaal ideaal M zodanig dat $x \notin M$. Dan $M + (x) = R$ (want $M + (x)$ is een ideaal dat M strikt bevat, **1/2 punt**). Derhalve $1 = m + xy$ voor een $m \in M$ en $y \in R$. Maar dan $1 - xy \in M$ en dus kan $1 - xy$ geen eenheid zijn (want anders $1 \in M$). Tegenspraak (**1/2 punt**).

Opgave 2.
(a) Ja. Eisenstein met $p = 5$ (geen verder argument nodig, **1/2 punt**).
(b) Neen. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^7 = \infty$ en $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^7 = -\infty$. Omdat $f(x)$ continu is, heeft ze dus een nulpunt (tussenwaardestelling) en is reducibel. Het is ok als de tussenwaardestelling/continuïteit niet expliciet genoemd worden (**1/2 punt**).
(c) Ja. Zij $f(x) = x^4 + 2$. Dan $f(x + 1) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 3$ (**1/4 punt**), met $f(x)$ irreducibel vanwege Eisenstein met $p = 2$ (**1/4 punt**). Dus $f(x+1)$ ook irreducibel (opgave wc, **1/4 punt**).
(d) Ja. $f(x)$ heeft geen nulpunten over $\mathbb{Z}_2$ (**1/4 punt**), maar zou nog het product van twee kwadratische veeltermen over $\mathbb{Z}_2$ kunnen zijn. De enige zulke kwadratische veeltermen zijn x^2, $x^2 + x$, $x^2 + 1$, $x^2 + x + 1$ en de enige mogelijkheid is $(x^2 + 1)(x^2 + x + 1) = x^4 + x^3 + x + 1$ (**1/2 punt**).

Opgave 3.
$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ is de cyclotome veelterm $\Phi_4(x)$ en heeft dus splijtlichaam $\mathbb{Q}(\zeta)$ met $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ (hc/boek, **1/4 punt**). (Dit kan ook snel gezien worden door te schrijven $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ en op te merken dat alle wortels hiervan gegeven worden door $1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$.) Omdat $f(x)$ irreducibel over $\mathbb{Q}[x]$ is (wc/boek), volgt $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = 4$ en dus $\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q})$ heeft orde 4 (**1/2 punt**). Zij $\phi \in G$, dan $\phi(\zeta)$ is een $\mathbb{Q}$-geconjugeerde van ζ en dus gelijk aan $\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$. Omdat $|G| = 4$, moet elk van deze mogelijkheden een element van G definiëren. We zien dat $\zeta \mapsto \zeta^2$ (of $\zeta \mapsto \zeta^3$) G voortbrengen en dus $G \cong \mathbb{Z}_4$ (**1/2 punt**). G heeft dus maar één niet-triviale ondergroep, te weten $\mathbb{Z}_2 = \langle(\zeta \mapsto \zeta^4)\rangle$ en dus is er maar één niet-triviaal tussenlichaam (**1/4 punt**). Het element $\zeta + \zeta^4$ is fixt onder $\mathbb{Z}_2$. Omdat $\zeta + \zeta^4 \notin \mathbb{Q}$ (hint), zien we dat het fixlichaam gelijk is aan $\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^4)$ (**1/2 punt**). De graad van dit tussenlichaam is 2 en dus zoeken we een kwadratische minimale veelterm:

$$
\begin{aligned}
&(\zeta + \zeta^4)^2 = \zeta^3 + \zeta^2 + 2, \\
&(\zeta + \zeta^4)^2 + (\zeta + \zeta^4) = \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 2, \\
&(\zeta + \zeta^4)^2 + (\zeta + \zeta^4) - 1 = \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0.
\end{aligned}
$$

Derhalve $m_{\zeta+\zeta^4/\mathbb{Q}} = x^2 + x - 1$ (want $\zeta + \zeta^4 \notin \mathbb{Q}$, **1/2 punt**).

Opgave 4.
(a) Zij $a, b \in E$. Evident: $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$. Maar ook $\phi(a + b) = (a + b)^q = a^q + b^q = \phi(a) + \phi(b)$ vanwege de "Freshman Binomial Theorem" (E heeft karakteristiek p en $q = p^n$ voor een $n > 0$, **1/4 punt**). Als $\phi(a) = a^q = 0$, dan $a = 0$ en dus is ϕ injectief en ook surjectief (want E is eindig, **1/4 punt**). Ten laatste, $a^q = a$ voor alle $a \in F$, omdat F gerealiseerd kan worden als het splijtlichaam van $x^q - x$ over $\mathbb{F}_p$ (**1/2 punt**).
(b) E/F is een eindige Galois-uitbreiding: E/F is normaal want een splijtlichaam van $x^{q^m} - x$ over F en separabel want eindig (opgave wc, **1/4 punt**). Merk op (**1/4 punt**)

$$E^{\langle\phi\rangle} = \{a \in E \ : \ \phi(a) = a\} = \{a \in E \ : \ a^q - a = 0\}.$$

Derhalve is $E^{\langle\phi\rangle}$ gelijk aan de nulpuntenverzameling van $x^q - x$. Die nulpuntenverzameling is precies F (**1/4 punt**).
(c) Vanwege de Galois-correspondentie en deel (b), hebben we $\langle\phi\rangle = \mathrm{Gal}(E/F)$ (**1/2 punt**). Merk ook op dat $[E : F] = m$. Derhalve is $\mathrm{Gal}(E/F)$ cyclisch van orde m (**1/4 punt**).