Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A−Eskwadraat.
Het college WISB222 werd in 2005/2006 gegeven door Wilberd van der Kallen.

Ringen en Galoistheorie (WISB222)
3 juli 2006

Opgave 1

Zij τ het reële getal $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ en zij $i \in \mathbb{C}$ de gebruikelijke wortel uit -1.
Zij $f(X) = (X^2-1)^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.
Zij L het lichaam dat over $\mathbb{Q}$ wordt voortgebracht door de nulpunten in $\mathbb{C}$ van $f(X)$.

a) Laat zien dat $f(\tau) = 0$.

b) Laat zien dat $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}(\tau)/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ Galois uitbreidingen zijn.

c) Laat zien dat er een $\beta \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ is met $\beta(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$.

d) Laat zien dat $\beta(\mathbb{Q}(\sqrt{2})) \subset \mathbb{R}$.

e) Laat zien dat $(\tau\beta(\tau))^2 = \tau^2\beta(\tau^2) = -1$.

f) Laat zien dat $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2}) \subset L$.

g) Laat zien dat τ, $-\tau$, i/τ, $-i/\tau$ de wortels van f zijn.

h) Laat zien dat $L = \mathbb{Q}(\tau, i)$ en bepaal $[L : \mathbb{Q}]$.

i) Laat zien dat $\mathbb{Q}(\tau)/\mathbb{Q}$ niet Galois is.

j) Laat zien dat er α, γ in $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ zijn met $\alpha(\tau) = \tau$, $\alpha(i) = -i$, $\gamma(\tau) = i/\tau$, $\gamma(i) = -i$. Men kan narekenen dat α, γ een diëdergroep D_4 voortbrengen.

Opgave 2

Gegeven is in $\mathbb{Z}[X]$ het ideaal $I = (6, X^2+5)$.

a) Laat zien dat $\mathbb{Z}[X]/I \cong \mathbb{Z}[X]/(2, X^2+5) \times \mathbb{Z}[X]/(3, X^2+5)$.

b) Laat zien dat $\mathbb{Z}[X]/I \cong \mathbb{F}_2[X]/(X+1)^2 \times \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$.

c) Hoeveel elementen heeft $\mathbb{Z}[X]/I$?

d) Vind een priemideaal van $\mathbb{F}_2[X]$ dat X^2+5 bevat.

e) Vind een priemideaal van $\mathbb{Z}[X]$ dat I bevat.

f) Vind een maximaal ideaal van $\mathbb{Z}[X]$ dat I bevat.