Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB222 werd in 2005/2006 gegeven door Wilberd van der Kallen.

Ringen en Galoistheorie (WISB222)
28 augustus 2006

- Zet op ieder vel uw naam en op het eerste vel uw studentnummer.
- Gebruik waar mogelijk eerdere delen van een opgave, ook als ze nog niet zijn opgelost.
- Geef steeds duidelijke argumenten.

Opgave 1

Zij $f(X) = X^4 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Zij L het lichaam dat over $\mathbb{Q}$ wordt voortgebracht door de nulpunten in $\mathbb{C}$ van $f(X)$. Zij τ een van deze nulpunten.

a) Laat zien dat $f(X)$ irreducibel is in $\mathbb{Q}[X]$.

b) Laat zien dat τ, $i\tau$, $-\tau$, $-i\tau$ de nulpunten zijn van f en dat $\tau^2 = \pm i\sqrt{2}$.

c) Laat zien dat $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$ een deelichaam van L is.

d) Laat zien dat $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$ Galois is over $\mathbb{Q}$.

e) Laat zien dat het restrictiehomomorfisme

$$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})/\mathbb{Q}),$$

dat $\alpha \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ stuurt naar $\alpha|_{\mathbb{Q}(i,\sqrt{2})}$, een surjectie is.

f) Laat zien dat er een $\alpha \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ is met $\alpha(i) = i$, $\alpha(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$.
In het vervolg werken we met zo'n α.

g) Laat zien dat $\alpha(\tau^2) \neq \tau^2$.

h) Laat zien dat $\alpha(\tau) = \pm i\tau$.

i) Bereken $\alpha^2(\tau)$.

j) Bepaal $[L : \mathbb{Q}]$.

Opgave 2

Zij K een lichaam.

a) Laat zien dat als K geen karakteristiek twee heeft, dat dan het ideaal $(X^2+1, X^4+1) \subseteq K[X]$ het eenheidsideaal is.

b) Laat zien dat als K wel karakteristiek twee heeft, dat dan $K[X]/(X^2 + 1, X^4 + 1)$ dimensie twee heeft als vectorrumte over K.

c) Geef een maximaal ideaal in $\mathbb{F}_2[X]/(X^2 + 1, X^4 + 1)$.

d) Bepaal de eenheden van $\mathbb{F}_2[X]/(X^2 + 1)$.

e) Bepaal de eenheden van $\mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$.