Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB222 werd in 2006/2007 gegeven door dr. G.L.M. Cornelissen.

Ringen en Galoistheorie (WISB222)
2 juli 2007

Geef niet enkel antwoorden, laat ook de redenering zien die tot het antwoord leidt.
Het is toegestaan boeken, handouts en aantekeningen te gebruiken.

Opgave 1 *(35 punten)*

Zijn volgende uitspraken goed of fout? Verklaar je antwoord.

a) Stel $d \in \mathbf{Z}$ met $d > 0$. De ring $\{a + b\sqrt{-d}\ : a, b \in \mathbf{Z}\}$ heeft eindig veel eenheden. *(5 punten)*

b) Stel t is transcendent over $\mathbf{Q}$. Het polynoom $X^{2007} - t^3$ is irreducibel over $\mathbf{Q}[t]$. *(5 punten)*

c) De ring $\mathbf{R}[X, Y]/(X^{2007} - YX - Y)$ is een domein. *(5 punten)*

d) In de ring $\mathbf{Q}[X]/(X^2)$ is $1 + X \bmod X^2$ een eenheid. *(5 punten)*

e) De ring $\mathbf{Z}/12$ is isomorf met een direct product van lichamen. *(5 punten)*

f) Een stelling van Feit en Thompson uit 1962 zegt dat elke groep van oneven orde oplosbaar is. Daarom is elk polynoom van oneven graad oplosbaar. *(5 punten)*

g) Stel t is transcendent over $\mathbf{F}_3$. Er is een lichaamsautomorfisme σ van het lichaam $\mathbf{F}_3(t, \sqrt{t}, \sqrt[3]{t})$ over $\mathbf{F}_3(t)$ zodat $\sigma(\sqrt{t}) = \sqrt[3]{t}$. *(5 punten)*

Opgave 2 *(10 punten)*

Toon aan: in een domein R zijn twee hoofdidealen (a) en (b) gelijk, precies als er een eenheid $c \in R^*$ bestaat met $a = bc$.

Opgave 3 *(10 punten)*

Stel $P \in \mathbf{Z}[X]$ is een polynoom met gehele coëfficiënten. We zeggen dat in een unitaire ring A de universele polynoomidentiteit $P = 0$ geldt als $P(a) = 0$ voor alle $a \in A$. Hierbij beschouwen we de coëfficiënten van P als elementen van A via het unieke ringhomomorfisme $\mathbf{Z} \to A$. Stel dat R en S twee ringen zijn en $\phi : R \to S$ een surjectief ringhomomorfisme. Toon aan dat in S de universele polynoomidentiteit $P = 0$ geldt, precies als $P(r) \in \ker(\phi)$ voor alle $r \in R$. Is dit ook waar als ϕ niet surjectief is? Verklaar.

Opgave 4 *(10 punten)*

Gegeven drie collineaire punten $(0, 0), (1, 0)$ en $(x_0, 0)$ in het vlak, met $x_0 \in \mathbf{Q}$. Toon aan dat een vierde punt $(x, 0)$, collineair met de gegeven punten, en met de eigenschap dat het product van zijn afstanden tot de drie gegeven punten gelijk is aan 1, construeerbaar is met passer en lineaal, precies als x_0 van de vorm

$$x_0 = t \pm \frac{1}{t(t-1)}$$

is voor $t \in \mathbf{Q} - \{0, 1\}$.

Opgave 5

Bepaal de Galoisgroep van het polynoom $X^4 + 2X^2 - 2$

a) over een lichaam met drie elementen; *(10 punten)*

b) over een lichaam met negen elementen; *(10 punten)*

c) over $\mathbf{Q}$. *(15 punten)*