

Deel tentamen DataStructuren 9 juni 2006
docent Marinus Veldhorst

Schrijf niet met rood en niet met potlood; zet op elk in te leveren vel:

- je naam (met initialen),
- collegekaartnummer,

Besef dat de aangegeven punten bij een opgave niet noodzakelijkerwijs de zwaarte van de opgave aangeven. Wees zo verstandig om een opgave eerst helemaal door te lezen voordat je een oplossing gaat opschrijven.

1. (3 punt)

Zeg van elk van onderstaande beweringen of hij waar (W) of onwaar (N) is. Schrijf je antwoord bij de bewering zelf, en lever het vel bij verlaten van de zaal in.

P.S. k goede antwoorden levert een score van $0.6 \max(0, k - 2)$ punt op.

- Bewering: Voor elke boom T en elke interne knoop u in T geldt: $depth(u) = height(T) - height(u)$.
- Bewering: Voor de functie $f(n) = (\log n)^{100}$ geldt $f(n)$ is $O(\frac{1}{10}n^{1/100})$.
- Bewering: Bij een postorder traversal van een binaire boom T wordt elke externe knoop van T eerder bezocht dan elke interne knoop van T .
- Bewering: Zoeken in een hashtable met chaining neemt in het slechtste geval niet meer dan $O(L)$ vergelijkingen waarbij L de load factor is.
(Met het slechtste geval wordt bedoeld het slechtste geval genomen over alle mogelijke series van aanroepen van de insert-operatie, gevolgd door aanroepen van de search operatie.)
- Bewering: Voor elk geheel getal h , $h \geq 2$, bestaat een binaire boom T_h van hoogte h en met 2^{h-1} interne knopen zodanig dat T_h een externe knoop heeft op niveau 1. (Besef dat de wortel op niveau 0 zit.)
- Zij gegeven drie functies f , g , h , met elk als parameter een niet-negatieve integer, en als uitkomst ook een niet-negatieve integer.
Bewering: Als $f(n)$ is $O(g(n))$ en $g(n)$ is $\Omega(h(n))$, dan geldt $f(n)$ is $\Theta(h(n))$.
- We beschouwen algemene (dus niet noodzakelijkerwijs binaire) bomen T . Zij T' de binaire boom representatie van T .
Bewering: Voor elke algemene boom T is de postorder-volgorde van de knopen van T gelijk aan de postorder-volgorde van de knopen van T' .

2. Volledige inductie (2 punt)

In deze opgave beschouwen we bomen T waarin elke interne knoop precies drie kinderen heeft. Zulke bomen noemen we propere triaire bomen. Met $E(T)$ en $I(T)$ geven we respectievelijk het aantal externe knopen in T en het aantal interne knopen in T aan.

- Bewijs met inductie dat voor elke propere triaire boom T geldt¹:

$$E(T) = 2 \cdot I(T) + 1.$$

Wees precies in het formuleren van de inductie hypothese en het zorgvuldig opschrijven van het bewijs.

¹Een 25 minuten na aanvang van het tentamen is meegedeeld dat T een niet-lege boom is, dus minstens één (externe) knoop heeft.

3. In deze opgave beschouwen we propere binaire bomen T . T wordt opgeslagen in een linked structure maar zonder *parent*-pointers.

Voor een knoop $v \in T$ geven we met $T(v)$ de deelboom in T aan die v als wortel heeft. Als v een interne knoop is, dan is $T_{left}(v)$ de linker deelboom van $T(v)$ en $T_{right}(v)$ de rechter deelboom van $T(v)$.

Met $closestext(v)$ bedoelen we de kortste **afstand** van v tot een externe knoop in T die tevens afstammeling is van v .²

We noemen een interne knoop $v \in T$ een **Q-knoop** als v elk van de volgende twee eigenschappen heeft:

- Het aantal interne knopen in $T_{left}(v)$ is strikt groter dan het aantal interne knopen in $T_{right}(v)$;
- De diepte van v in T is strikt groter dan $closestext(v)$.

- (a) **(0.5 punt)** Teken een boom met minstens drie Q-nodes. Geef in de boom drie knopen aan die Q-nodes zijn.
- (b) **(2.5 punt)** Geef een algoritme die voor een gegeven propere binaire boom alle Q-knopen print. Andere knopen mogen niet geprint worden. Schrijf je algoritme op in **pseudo-code**. De algoritme moet werken in tijd lineair in het aantal knopen van T .

Beargumenteer dat je algoritme correct is en voldoet aan de tijdgrens.

4. **(2 punt)** We beschouwen een initieel lege hashtabel voor 13 entries. Als hashfunctie nemen we

$$h_1(i) = (2i + 1) \bmod 13$$

- (a) Teken de hashtabel na de toevoeging van **elk** van de volgende keys.

$$4, 24, 14, 7, 20, 17, 27, 0, 11.$$

Collision handling wordt afgehandeld met linear probing.

- (b) Zelfde vraag als bij 4 (a), maar nu wordt collision handling afgehandeld door middel van double hashing gebruik makend van de tweede hashfunctie

$$h_2(i) = 12 - (i \bmod 11).$$

————— *einde toets* —————

²Besef dat v een afstammeling van zichzelf is, en dat afstand gedefinieerd is als het aantal edges op een pad.