A.G.E.N.T. X.

Beste deelnemers,
We hopen dat jullie hebben genoten van de A.G.E.N.T. X. en dat jullie net zo zullen genieten van dit verslag met alle grappige, serieuze of opmerkelijke dingen die er voorgevallen zijn tijdens de wedstrijd. De jury heeft dat in elk geval wel gedaan.
Veel leesplezier!
De jury

Opgave 1. Infiltranten van de CACTUS[1] hebben een geheime boodschap in deze wedstrijd verstopt. Vind deze boodschap. (Hint: deze wedstrijd is grondig gecontroleerd.)

Oplossing.
Het doel van deze opgave was om spelfouten in de wedstrijd te vinden. We zijn erg blij dat veel van jullie dit door hadden. Helaas was er een ë weggevallen, waarvan de jury volledig de schuld wil geven aan LaTeX (alleen de TeX-file was gecontroleerd op spelfouten).
Als je al deze letters achter elkaar zet krijg je de tekst "acht bo(ë)ven twee", voor een volledige score had je als antwoord "28" moeten geven.

[1] Centraal Algemeen Combinatoriek Toernooi voor Universitaire Studenten.

Opgave 2. Zij Γ een cirkel met middelpunt M, en zij A, B en C drie punten op Γ met B op de korte boog AC. De lijn BM en de omgeschreven cirkel van $\triangle AMC$ snijden in D. Bewijs dat B het middelpunt van de ingeshreven cirkel van $\triangle ADC$ is.

Oplossing.
Het is duidelijk dat DM de bissectrice van $\angle ADC$ is, want ze staan in de omgeschreven cirkel van AMC op AM en CM, en deze hebben gelijke lengte. Verder zien we dat $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle AMB$ wegens de middelpunts-omtrekshoekstelling en $\angle AMB = \angle AMD = \angle ACD$ wegens de omtrekshoekstelling. Hieruit volgt dat AB de bissectrice van $\angle DAC$ is. Daarmee is B het snijpunt van twee bissectrices en dus het midden van de ingeschreven cirkel.

De jury was blij om te zien dat veel mensen deze opgave hadden opgelost. De jury wil wel *Lammert* even noemen voor zijn prestatie een netversie van twee bladzijden te produceren met een oplossing die ook echt niet korter kon.

Opgave 3. Tijdens de wedstrijd komen er twee tijdbommen bij twee deelnemers te liggen. Je moet zorgen dat ze niet bij jou of een van je buren liggen als ze afgaan. Je mag de tijdbom doorgeven, volgens de volgende regels:

- Je mag de bom niet teruggeven aan iemand die hem net had of iemand die er al een heeft.
- Als je de bom een kwartier lang niet doorgeeft ontploft hij automatisc.
- Om de bom te mogen verplaatsen moet je een vliegtuigje van papier tegen de markering op het bord gooien van achter de streep. Als het lukt moet je je vliegtuigje inleveren. Daarna mag je de bom bij iemand anders neerleggen.

Oplossing.
Bij deze opgave bleek het handig als je wist hoe je een vliegtuigje moest vouwen. Tegen de verwachting van de jury in bleek niet iedereen daar toe in staat. De jury was vol bewondering voor de inzet van *Freek*, die na een kwartier nog niet het doelwit geraakt had.

Opgave 4. Gegeven een scherphoekige driehoek $\triangle ABC$ met $|AC| \neq |BC|$. Laad K het voetpunt van de hoogtelijn zijn vanuit C op AB en zij M het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Bewijs dat vierhoeken $AKMC$ en $BKMC$ dezelfde oppervlakte hebben.

Oplossing.
Zij N het midden van AB. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat N tussen A en K ligt. De oppervlakte van $\triangle KMC$ is gelijk aan $\frac{1}{2}|NM||KC|$. De oppervlakte van $\triangle BKC$ is $\frac{1}{2}|KB||KC|$ en de oppervlakte van $\triangle AKC$ is $\frac{1}{2}|KA||KC|$. Vierhoek $BKMC$ bestaat uit driehoek $\triangle BKC$ plus driehoek $\triangle KMC$ en driehoek $\triangle AKC$ bestaat uit vierhoek $AKMC$ plus $\triangle KMC$. We moeten dus bewijzen dat

$$\frac{1}{2}|KB||KC| + \frac{1}{2}|NK||KC| = \frac{1}{2}|KA||KC| - \frac{1}{2}|NK|KC|.$$

Merk op dat $|KA| - |NK| = |AN| = |BN| = |BK| + |KN|$, dit vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}|KC|$ levert precies wat we moeten bewijzen.

De jury vond de prestaties van de deelnemers op deze opgave zeer matig. Alleen *Jorke* wist deze opgave goed op te lossen. Een aantal deelnemers hadden nog wel bedacht om de vierhoeken op te delen in driehoeken, maar de formule "een half keer basis keer hoogte" bleek meestal toch te veel gevraagd. Het is ook niet nodig om sinussen uit te rekenen om de oppervlaktes te berekenen (foei *Feike*!).

Opgave 5. A.G.E.N.T. X. heeft verdachte personen gezien bij pizzeria *De volle functor*. Hij ondervraagt de eigenaar, Hunktor:

"Ik sta simpelweg bekend als een voortreffelijk etaplissement met mijn salami-6-kazen pizza. De critici aanbidden mijn gerechten. Ze struikelen alleen altijd bij de hoge stap over de drempel, vooral als ze een karaf bier p hebben. De meeste vaste cliënten wonen rondom Oss, adressen kan ik u helaas niet geven."

Van welke organisaties dineren er mensen bij *De folle functor*?

Oplossing.
In het verhaal zitten de volgende organisaties verstopt (op volgorde): stasi, nsa, mi-6, cia, gestapo, fbi, mossad.

Geen enkele deelnemer had bedacht om op deze manier naar de tekst te kijken. Alleen *Freek* heeft bij toeval een van de goede antwoorden opgeschreven (mi-6) en daarmee vier punten gescoord.

Opgave 6. Zij M en punt, Γ_1 en Γ_2 twee cirkels met middelpunt M, met de straal van Γ_1 gelijk aan 1 en die van Γ_2 groter dan 1. Zij A en B twee punten op Γ_2 zodat $\angle AMB = 90°$. Zij C een snijpunt van BM en Γ_1. Zij D en E de snijpunten van AC met Γ_1 en Γ_2 respectievelijk.

(a) Bewijs dat $|AD| = |CE|$.

(b) Stel dat $|CD| = 2|CE|$. Bewijs dat AB raakt aan Γ_1.

Oplossing.
Voor (a): Zij r de straal van Γ_2. Dan is de macht van C ten opzichte van Γ_2 gelijk aan $-(r-1)(r+1)$ en de macht van A ten opzichte van Γ_1 is $(r-1)(r+1)$. Dan krijgen we dat $AD \cdot AC = (1+r)(1-r) = -CE \cdot CA$, met twee keer de machtstelling. Als we absolute waardes nemen vinden we meteen dat $|AD| = |CE|$.
Voor (b): Met de stelling van Pythagoras zien we dat $1+r^2 = |MC|^2 + |MA|^2 = |AC|^2$. Omdat $|AC| = |AD| + |DC| = 3|CE| = 3|AD|$ vinden we dat de macht van A ten opzichte van Γ_1 gelijk is aan $(r-1)(r+1)$ maar ook aan $|AD||AC| = \frac{1}{3}|AC|^2 = \frac{1}{3}(1+r^2)$. We vinden dat r voldoet aan $3r^2 - 3 = 1 + r^2$, dus $4 = 2r^2$, dus $r = \sqrt{2}$. Maar dan rekenen we ook snel uit dat lengte van de hoogtelijn vanuit M op AB gelijk is aan $\frac{r}{\sqrt{2}} = 1$, het voetpunt ligt dus op Γ_1. Omdat deze hoogtelijn loodrecht staat op AB volgt dat de cirkel raakt aan AB in het voetpunt.

De jury was blij met de vele verschillende oplossingen voor deze opgave. Met name de oplossing van *Jens* is noemenswaardig omdat hij de opgave oplost met behulp van een coördinatenstelsel en het niet heel lelijk was.

De jury heeft bij deze opgave een blaadje zonder naam gekregen, met een handschrift dat niet overeenkwam met de andere deelnemers. We hebben deze oplossing toegeschreven aan *Joël*, waarvan we weten dat hij aanwezig was maar verder niets heeft ingeleverd. Mochten we hier een foute inschatting gemaakt hebben, laat het dan vooral weten zodat we de uitslag kunnen rectificeren.

Opgave 7. Elke agemt met een *license to kill* heeft een code in de vorm $00i$ met i een cijfer ongelijk aan 0.

(a) Geef jezelf zo'n code. Je krijgt alleen punten als je de enige bent met de door jou gekozen code.

(b) Elimineer een tegenstander door de naam van deze persoon op te schrijven, met de code waarvan je denkt dat deze persoon die heeft opgeschreven.

(c) Schrijf de naam op van iemand waarvan je denkt dat hij jou probeert te elimineren. Als je het goed hebt, krijgt die persoon hier geen punten voor.

Oplossing.
Hoewel bijna iedereen deze opgave geprobeerd heeft, zijn hier niet veel punten gescoord. Alleen *Jorke* en *Elise* hadden een unieke code gekozen. Dit terwijl de codes 005, 008 en 009 nog vrij waren! De jury wil de deelnemers er op wijzen dat "0" geen cijfer is ongelijk 0. De jury wil *Mashal* erop wijzen dat "het kleinste getal wat niet gekozen is door andere deelnemers" niet een geldige definitie is van een getal (voor meer informatie, zoek eens op wat "impredicatieve definities" zijn). Bovendien zijn een getal en een cijfer verschillende dingen.

Slechts twee mensen deden een correcte poging tot elimintatie: *Jorke* elimineerde *Ludo* en *Jens* deed een poging om *Lisanne* te elimineren, maar die had dat voorzien en scoorde daarmee de punten die *Jens* ander had gehad.

Opgave 8. Zij $ABCD$ een trapezium met een ingeschreven cirkel zodat $AB//CD$ en $AB > CD$. De ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$ raak AC en AB in respectievelijk N en M. Bewijs dat het middelpunt van de ingeschreven cirkel van het trapezium $ABCD$ op MN ligt.

Oplossing.
Noem J het middelpunt van de ingeschreven cirkel van ABC. En noem het snijpunt van BJ en MN punt I. We gaan nu bewijzen dat I het middelpunt van de ingeschreven cirkel van het trapezium is.

Allereerst bewijzen we dat $CNIJ$ een koordenvierhoek is. Er geldt dat $\angle JIN = \angle IMB + \angle IBM = 180 - \angle AMN + \frac{1}{2}\angle ABC = 180 - (90 - \frac{1}{2}\angle BAC) + \frac{1}{2}\angle ABD = \frac{1}{2}(180 + \angle ABC + \angle BAC) = 180 - \frac{1}{2}\angle ACB = 180 - \angle NCJ$. En dus is CNIJ een koordenvierhoek.

Hieruit volgt dat $\angle CIJ = \angle CNJ = 90\,\text{deg}$. En dus is $\angle ICN = 90 - \angle CBI = \frac{1}{2}(180 - \angle CBA) = \frac{1}{2}\angle DCB$. En dus zien we dat CI de bissectrice is van $\angle DCB$. Daaruit volgt dat punt I het snijpunt is van 2 bissectrices van het trapezium, en dus het middelpunt van de ingeschreven cirkel is.

Dit is de laatste even opgave geweest waarvoor de jury een inzending heeft ontvangen; *Jorke* heeft een plaatje getekend.

Opgave 9. Zoals je veet begint elke goede spionnenfilm met een lied van een bekende artiest (denk bijvoorbeeld aan *Skyfall*). Schrijf een lied voor de film *A.G.E.N.T. X.*

Oplossing.
De jury was zeer tevreden met alle leuke inzendingen die hier naar voren kwamen. Vooral de inzending van *Gerben* werd gewaardeerd. De jury was bijna overtuigd van de inzending van *Mike*, maar dat bleek achteraf gewoon een minder leuke versie van de Pokémon theme song. Ter inspiratie hier nog de inzending van *Gerben*:

Couplet 1
Every day in the dark of the night,
our oath us connected,
our future is bright
Evert time, when I look in your eyes,
I cannot see you,
Becaues you are in disguise
Vioolloopje

Refrein
A.G.E.N.T. X.!!!
Shalalalala lalalaaaa
A.G.E.N.T. X.!!!
ooooh yeeyeeee!
He is our best maaan
Solving mysteries, YES HE CAAAN!

Couplet 2
When you ask him,
the fastest path integral
He tells you,
that he knows them, all
And when you
struggle with a derivative
He sneaks around
And makes it all intuitive
Vioolloopje

Refrein (2x)

Opgave 10. Zij A, B en C drie punten op een lijn met B tussen A en C en $|BC| < |AB|$. Zij X_0 en X_1 twee punten zodat A, X_0 en X_1 op een lijn liggen en $BX_0 \parallel CX_1$. Gegeven X_i en X_{i+1} definiëren we X_{i+2} als volgt: zij B_i en C_i punten zodat ABB_iX_i en ACC_iX_i parallellogrammen zijn. Dan is X_{i+2} het snijpunt van AX_{i+1} met de lijn door C_i evenwijdig met B_iX_{i+1}. De rij X_i convergeert naar een punt X. Bewijs dat $BCXX_0$ een koordenvierhok is precies als $|AB|^2 = |BC|^2 + |AX_0|^2$.

Oplossing.
Het is gemakkelijk met inductie te zien dat A en alle X_i op één lijn liggen. Zij $x = \frac{|BC|}{|AB|}$. Omdat de driehoeken $\triangle X_iB_iX_{i+1}$ en $\triangle X_iC_iX_{i+2}$ gelijkvormig zijn door een snavelfiguur, merken we op dat $\frac{|X_{i+1}X_{i+2}|}{|X_iX_{i+1}|} = \frac{|B_iC_i|}{|X_iB_i|} = x$ door de constructie van B_i en C_i. Ook met zo'n snavelfiguur vinden we dat $\frac{X_0X_1}{AX_0} = x$.

Als nu $a = |AX_0|$, dan vinden we met inductie dat $|X_iX_{i+1}| = ax^{i+1}$ (met $A = X_{-1}$). De conclusie is nu dat

$$|AX| = |AX_0| + |X_0X_1| + |X_1X_2| + \ldots = a + ax + ax^2 + \ldots = \frac{a}{1-x}.$$

Met de machtstelling kunnen we de voorwaarde dat $BCXX_0$ een koordenvierhok is precies als $|AB||AC| = |AX_0||AX| = \frac{a^2}{1-x}$. Dit is hetzelfde als $a^2 = |AB|(|AB| + |BC|)(1-x) = |AB|^2 + |AB||BC| - x|AB|^2 - x|AB||BC|$. Omdat $x|AB| = |BC|$ is dit equivalent aan $|AX_0|^2 = a^2 = |AB|^2 - |BC|^2$, precies wat we wilden bewijzen.

Opgave 11. We hebben hier een woordgraptogram: er zijn een aantal omschrijvingen en het antwoord op elke is een woordgrap. Als je alle woorden hebt geven de cijfers achter elke omschrijving nog een extra woord.

- Schrijver van "Ik ben vlaams". (4)
- Bonjour, comment ...? (4)
- Meetkundige die graag rum drinkt. (4)
- Controversiële wiskundige die mensen aan slavernij doet denken. (6)
- Deze wiskundige is erg rustig. (1)
- Bekende spion die van ingeblikte groente houdt. (2)
- Met dit instrument vindt deze wiskundige de noordpool. (9)
- Valse meetkundige en mythologische koning. (3)

Oplossing.

- Ian Fleming
- Ceva
- Brocardi
- Zwarte Pythagoras
- Paskalm
- James Bonduelle
- Kompascal
- Gemenelaos

Als je van elke oplossing de letter pakt die tussen haakjes staat krijg je als antwoord: facepalm.

De jury kreeg hier veel alternatieve oplossingen. Als deze ergens op sloegen, konden er sprokkelpunten worden gehaald.

Opgave 12. Laat X, Y, Z en D vier punten zijn. Laat A, B, en C de snijpunten zijn van respectievelijk de bissectrices van $\angle XDY$, $\angle YDZ$ en $\angle ZDX$ met de omgeschreven cirkels van $\triangle XDY$, $\triangle YDZ$ en $\triangle ZDX$. Stel dat X op AC ligt, Y op BC en Z op AB. Bewijs dat D het middlpunt van de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$ is.

Oplossing.
In deze oplossing gebruiken we gerichte hoeken. Er geldt dat $\angle AXY = \angle YXZ + \angle ZXC = \angle AXC = 0$ omdat X op AC ligt. Nu rekenen we ook uit dat $\angle YDZ = \angle YDA + \angle ADX + \angle XDC + \angle CDZ = 2\angle YDA + 2\angle CDZ = 2\angle YXA + 2\angle CXY$ wegens de bissectrices en de omtrekshoekstelling, maar we hebben net gezegd dat dit ook $2\angle YXZ$ is. Als O het middelpunt van de omgeschreven cirkel van XYZ is, volgt er dus dat $YZDO$ een koordenvierhoek is. Analoog vinden we ook dat $XYDO$ en $YZDO$ koordenvierhoeken zijn. Maar drie cirkels hebben in het algemeen maximaal één snijpunt, dus $O = D$. (De cirkels kunnen niet samenvallen omdat X, Y, Z, D, A, B en C dan allemaal op deze cirkel liggen en dan geldt de voorwaarde nooit. Het kan ook niet dat er twee punten zijn waar alledrie cirkels doorheen gaan, want dan moeten X, Y en Z allemaal een van deze twee punten zijn, en dan zijn niet alle bissectrices gedefiniëerd. Dus er is inderdaad maximaal één snijpunt.)

Maar als D het middelpunt is van de omgeschreven cirkel, dan geldt dat $|XD| = |YD|$ en dus volgt $\triangle ADY \cong ADX$ (ZHZ), dus $\angle YAD = \angle DAX$ en dus is AD de bissectrice van $\angle XAY = \angle BAC$. Analoog volgt dit ook voor de andere punten, dus is D inderdaad het middelpunt van de ingeschreven cirkel.

Opgave 13. Q zit bij de A.G.E.N.T. X., maar eigenlijk moet hij een wapen maken voor Agent X. Bedenk een wapen dat Q kan maken van spullen die je redelijkerwijs meeneemt in je etui naar de A.G.E.N.T. X.

Oplossing.
De jury was geschokt hoe dodelijk een etui kan zijn. De winnende inzending was van *Elise*, die een simpele manier had bedacht om het mesje van een puntenslijper richting een vijand te schieten. De puntenslijper kan je demonteren door een geodriehoek als schroevendraaier te gebruiken. De jury weet niet of de katapult van *Jens* bedoeld was als wapen tegen jezelf of de tegenstander. *Lammert* kwam met het idee om een "geslepen" gum richting een vijand te schieten, maar de jury vraagt zich af hoe effectief dit is.

Opgave 14. P, Q zijn isogonaal geconjugeerde punten binnen $\triangle ABC$. E en F zijn de respectievelijke projecties van P op CA en AB. X is de projectie van Q op BC. Laat $K \neq A$ het tweede snijpunt zijn van de cirkel met diameter PA met de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Laat $T \neq A$ het tweede snijpunt zijn van AQ met de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Bewijs dat T, K en X collineair zijn.
Twee punten P en Q heten isogonaal geconjugeerd *in $\triangle ABC$ als de in totaal zes voetpunten van P en Q op de zijden van $\triangle ABC$ een koordenzeshoek vormen.*

Oplossing.
Infiltranten van de CACTUS hebben de oplossing van deze prachtige opgave ontvreemd. Voor de gouden tip kunnen met terugwerkende kracht bonuspunten worden verdiend.

Bonuspunten Zoals elk jaar krijgen de deelnemers bonuspunten voor creativiteit, assertiviteit en behulpzaamheid. Dit jaar is de verdeling als volgt:

De jury kent een bonuspunt toe aan *Joël* voor het wel op komen dagen maar geen uitwerkingen inleveren met naam.

De jury kent een bonuspunt toe aan *Freek* voor het uitlenen van ducttape.

De jury kent een bonuspunt toe aan *Lammert* voor het niet vertrouwen van een doos waar "Tijdbom" op staat.

De jury kent een bonuspunt toe aan *Luuk* vanwege zijn zelfinschatting dat hij opgave 2 niet op kon lossen, maar wel een plaatje tekende omdat het leuk was.

De jury kent een bonuspunt toe aan *Ludo* en *Freek* omdat ze niet wisten hoe ze een vliegtuigje moeten vouwen.

De jury kent drie bonuspunten toe aan *Lammert* voor het bijhouden van een dagboek bij opgave 3. De jury leeft mee met het verlies van zijn arm en hoopt dat hij hem snel terugvindt.

De jury kent een bonuspunt toe aan *Freek* voor het doorzetten bij opgave drie en steeds maar weer het doelwit te missen met een misvormde papieren vliegmachine.

De jury kent een bonuspunt toe aan *Lammert* voor een realistische tekening van Asterix en Obelix bij opgave 5.

De jury kent een bonuspunt toe aan *Feike* voor het ontdekken van een fout in opgave 6.

De jury kent een bonuspunt toe aan *Jens* voor het correct gebruik van coördinaten bij opgave 6.

Piet de Panda kent een bonuspunt toe aan *Lisanne*.

De jury kent een bonuspunt toe aan *Jorke* voor het tekenen van een plaatje bij opgave 8.

De jury kent een bonuspunt toe aan *Gerben* en *Ludo* voor het niet meenemen van een passer en potlood, maar wel een serieuze poging hebben gedaan om plaatjes te tekenen.

De jury kent een bonuspunt toe aan *Lisanne* omdat ze popcorn wil eten uit de tijdbom.

De jury kent een bonuspunt toe aan *Lammert* voor het schrijven van een netversie bij opgave 1 en het schrijven van netversies in het algemeen.

De jury kent een bonuspunt toe aan *Freek* voor het aanvullen van het volledige adres van het Buys Ballotgebouw zodat we de maaltijd daar konden laten bezorgen.

De jury kent een bonuspunt toe aan *Freek* voor het vinden van een (door de jury onopgemerkte) oplossing van opgave 1, door verschillende aanwijzingen te vinden die, in zijn eigen woorden, als een Cauchyrij convergeerden naar de oplossing "Centraal Algemeen Combinatoriek Toernooi voor Universitaire Studenten".