- Je hebt twee uur de tijd voor het oplossen van de opgaven.
- Elke opgave is maximaal 10 punten waard.
- Het is een wedstrijd en geen tentamen. Daarom is te verwachten dat maar weinigen alles goed zullen hebben. Maak je dus alleen ongerust als je alle vragen hebt opgelost.
- Voor mooie of originele plaatjes zijn bonuspunten beschikbaar.

1^E Hoger Onderwijs Meetkunde Olympiade

11 november 2014

Opgave 1. Heb je een passer bij je?

Opgave 2. Zij $\triangle ABC$ een driehoek. Op AB ligt een punt P zodat $|AP| = |CP|$ en op AC ligt een punt Q zodat $|AQ| = |BQ|$.
Bewijs dat de punten B, C, P en Q op een cirkel liggen.

Opgave 3. Op een beroemde lijst van de Amerikaanse wiskundige Kimberling staan meer dan 1000 driehoekscentra. Het eerste Kimberlingcentrum is bijvoorbeeld het middelpunt van de ingeschreven cirkel. Schrijf een aantal centra van deze lijst op.
(Je score bij deze vraag is 10 als $b \geq 9$ en $\max(0, 2b - a)$ anders, waarbij a het totaal aantal Kimberlingcentra is dat je hebt opgeschreven en b het aantal verschillende hiervan is dat bij de eerste 10 Kimberlingcentra zit.)

Opgave 4. Zij $ABCD$ een koordenvierhoek. Laat P en Q punten zijn op de respectievelijke lijnstukken AC en BD zodanig dat $\angle ABP = \angle DCQ$.
Bewijs dat $PQ \parallel AD$.

Opgave 5.
Kring die een brief ontvangen heeft (13,7).
Inversie-ellips (9).
Snijden in een driehoek wel, maar op een landkaart niet (11).
Hierop wordt een diavoorstelling getoond (3,11,4).

Opgave 6. Zij $ABCD$ een parallellogram met $\angle A > 90°$. De lijn door B loodrecht op AB snijdt de lijn door D loodrecht op AD in E. Bewijs dat $\angle BEC = \angle AED$.

Opgave 7. We bekijken de volgende bewering: “Er bestaat een boldriehoek met hoekensom ω dan en slechts dan als $\alpha < \omega < \beta$.”

(a) Geef waarden van α en β waarvoor deze bewering niet waar is.

(b) Geef waarden van α en β waarvoor deze bewering waar is.

Let op: de wedstrijd gaat verder op de achterkant!

Opgave 8. Zij $\triangle ABC$ een gelijkbenige driehoek met $|AB| = |AC|$. Binnen driehoek ABC liggen punten P en Q zodat A op PQ ligt en zodat $\angle ABP = \angle PAC$ en $\angle ACQ = \angle QAB$. Zij R het snijpunt van BP en CQ. Zij I het middelpunt van de ingeschreven cirkel van $\triangle PQR$.
Bewijs dat I het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ is.

Opgave 9.

(a) Schrijf de naam op van een meetkundestelling die door geen andere deelnemer wordt opgeschreven.

(b) Schrijf de naam op van een deelnemer die vraag (a) niet oplost.

Opgave 10. De bissectrices uit A en B in een driehoek $\triangle ABC$ snijden de zijden BC en AC in respectievelijk D en E. Op respectievelijk AD en BE liggen punten K en L (ongelijk aan A en B) zodat $|AB| = |AL| = |BK|$.
Bewijs dat het snijpunt van KE en LD op de zwaartelijn uit C in $\triangle ABC$ ligt.

Opgave 11. Uit een gedicht van welke Nederlandse dichter (1905-1962) komen de volgende regels?

> *"Ik kan u niet met Euclides beschrijven,*
> *want de figuur waarmee gij congrueert*
> *heeft punten nodig der oneindigheid."*

Opgave 12. Zij $\triangle$ een driehoek en veronderstel dat iedere zijde van $\triangle$ de poollijn is van het tegenoverliggende hoekpunt ten opzichte van een cirkel ω. Bewijs dat de snijpunten van ω en de omgeschreven cirkel van $\triangle$ op de negenpuntscirkel van $\triangle$ liggen.

Opgave 13. Zing een Sint-Maartenliedje voor de surveillant.

Opgave 14. Zij $\triangle ABC$ een driehoek. Zij A' het punt op de hoogtelijn uit A zodat de lijn door R en het midden van BC door het middelpunt van de ingeschreven cirkel van de driehoek gaat. Definieer B' en C' analoog. Zij A'' het punt waar de aangeschreven cirkel tegenover A zijde BC raakt en definieer B'' en C'' analoog.
Bewijs dat de driehoeken $\triangle A'B'C'$ en $\triangle A''B''C''$ congruent zijn.