Opgave 1 Bepaal alle reëelwaardige polynomen $P(x)$ waarvoor geldt dat $P(2k) = P(2k+1)$ voor alle k met $0 \leq k < \deg(P)$.

Oplossing We bekijken het polynoom $Q(x) = P(x+1) - P(x)$. Merk op dat $Q(2k) = 0$ voor alle k met $0 \leq k < n$. Q heeft dus minimaal n nulpunten. De kopcoëfficiënt van $P(x)$ is hetzelfde als die van $P(x+1)$. Omdat Q het verschil daartussen is, vallen deze coëfficiënten tegen elkaar weg en is de graad van Q kleiner dan n. Maar Q heeft wel minimaal n nulpunten, dus Q is het nulpolynoom. Hieruit volgt dat $P(x) = P(x+1)$, en dit kan alleen bij constante functies.

Oplossing Voor elke k met $0 \leq k < n$ geldt dat $P(2k) = P(2k+1)$. Uit de middelwaarde stelling volgt dat de afgeleide P' ergens tussen $2k$ en $2k+1$ nul moet zijn. De afgeleide P' heeft dus minimaal $\deg(P)$ nulpunten. De graad van P' is echter gelijk aan $\deg(P) - 1$, dus P' heeft meer nulpunten dan de graad, dus P' is het nulpolynoom. Dit kan alleen als P constant is.

Opgave 2 Laat zien dat voor alle $x, y, z \in \mathbb{N}_{>0}$ geldt dat:

$$x \uparrow\uparrow y \equiv x \uparrow\uparrow z \mod 2^{\min(y,z)}$$

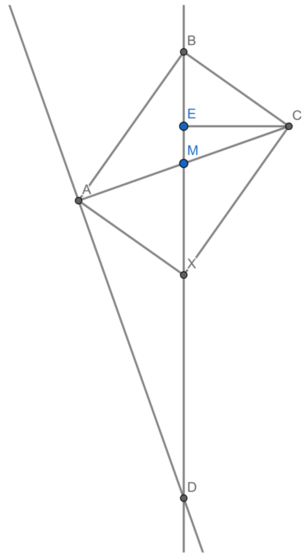
(De notatie $a \uparrow\uparrow b$ staat voor $a^{a^{\cdots^{a}}}$ met b-maal een a, bijvoorbeeld: $2 \uparrow\uparrow 4 = 2^{2^{2^{2}}} = 65536$)

Oplossing Neem z.v.v.a. aan dat $y \leq z$. We onderscheiden twee gevallen: x is even of oneven.

(x even)
Merk op dat $2|x$. Hieruit volgt dat voor alle a geldt dat $2 \uparrow\uparrow a$ een deler is van $x \uparrow\uparrow a$. Uit inductie volgt dat 2^a een deler is van $2 \uparrow\uparrow a$, hieruit volgt dat $2^y \mid (2 \uparrow\uparrow y) \mid (x \uparrow\uparrow y) \mid x \uparrow\uparrow z$, waarbij de laatste deling volgt omdat $y \leq z$. Er geldt dus dat $x \uparrow\uparrow y \equiv x \uparrow\uparrow z \equiv 0 \mod 2^y$.

(x oneven)
We gebruiken inductie op y. Voor $y = 1$ (en dus $z \geq 1$) geldt dat $x \uparrow\uparrow 1$ en $x \uparrow\uparrow z$ beide oneven zijn, dus $x \uparrow\uparrow 1 \equiv x \uparrow\uparrow z \mod 2^1$. Stel nu dat voor een zekere k geldt dat $x \uparrow\uparrow k \equiv x \uparrow\uparrow z \mod 2^k$ voor alle $z \geq k$.
Laat een $z \geq k+1$ gegeven zijn. Er geldt nu dat $x \uparrow\uparrow k \equiv x \uparrow\uparrow z-1 \mod 2^k$. Omdat $\phi(2^{k+1}) = 2^k$ en x oneven is geldt vanwege de stelling van Euler-Fermat dat $x^{2^k} \equiv 1 \mod 2^{k+1}$. Hieruit volgt dat $a \equiv b \mod 2^k$ impliceert dat $x^a \equiv x^b \mod 2^{k+1}$. Door $a = x \uparrow\uparrow k$ en $b = x \uparrow\uparrow z-1$ in te vullen vinden we dat $x \uparrow\uparrow k+1 = x^{x \uparrow\uparrow k} \equiv x^{x \uparrow\uparrow (z-1)} = x \uparrow\uparrow z \mod 2^{k+1}$. Hiermee is de inductie voltooid. Er geldt dus altijd dat $x \uparrow\uparrow y \equiv x \uparrow\uparrow z \mod 2^y$.

Opgave 3 Gegeven is een driehoek ABC. Definiëer ℓ_1 als de zwaartelijn van B naar AC en ℓ_2 als de lijn door A loodrecht op AC. De lijnen ℓ_1 and ℓ_2 snijden in D. Definiëer E als het voetpunt van de hoogtelijn van C naar ℓ_1. Stel nu dat $\angle BCA + \angle ABD = 90°$, $|DA||AB| = |DB||BC|$ en $2|AC| = |BD|$. Laat zien dat E het zwaartepunt van driehoek ABC is.



Oplossing Definieer nu punt X als de puntspiegeling van B door het midden van AC. Er geldt nu dat X op ℓ_1 ligt en dat $\square ABCX$ een parallellogram is. Hieruit volgt in het bijzonder dat $\angle BCA = \angle CAX$. Omdat $\angle BCA + \angle ABD = 90°$ en $\angle CAX + \angle XAD = \angle CAD = 90°$ volgt dat $\angle ABD = \angle XAD$. Omdat ook geldt dat $\angle ADX = \angle BDA$ (zelfde hoek) volgt dat $\triangle ADX \sim \triangle BDA$ (hh).

Uit $\angle ABD = \angle XAD$ volgt ook dat $\angle ABX = \angle XAD$. Vanwege de raaklijn omtrekhoeksstelling geldt nu dat ℓ_2 een raaklijn is van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABX$. Noem deze cirkel Γ en noem het midden van AC M.

Omdat AC loodrecht staat op ℓ_2 moet het midden van Γ op AC liggen. Dit midden is ook het snijpunt van de middelloodlijnen van $\triangle ABX$ en ligt dus op de middelloodlijn van BX. Deze lijn snijdt met AC in M, dus M moet het midden van Γ zijn. Omdat M het midden van AC is volgt dat C ook op Γ ligt. In het bijzonder is $\square ABCX$ dus een koordenvierhoek. Omdat het ook al een parallellogram is, volgt dat $\square ABCX$ een rechthoek moet zijn.

Noem de straal van Γ r. Dan geldt dus dat $|BX| = 2r$. De diagonalen in een rechthoek zijn even lang, dus $|AC| = |BX| = 2r$. Omdat $2|AC| = |BD|$ volgt dat $|BD| = 4r$ en dat X het midden is van BD. Uit $\triangle ADX \sim \triangle BDA$ volgt dat $\frac{|DB|}{|DA|} = \frac{|DA|}{|DX|} = \frac{|BA|}{|AX|}$. Uit de eerste gelijkheid volgt dat $|DA| = 2\sqrt{2}r$ en uit de tweede vervolgens dat $\frac{|BA|}{|AX|} = \sqrt{2}$.

Vanwege Pythagoras geldt dat $|BA|^2 + |AX|^2 = |BX|^2 = 4r^2$. Dit geeft dat $|AX| = 2\sqrt{3}r$ en dus ook dat $|BC| = 2\sqrt{3}r$. Omat $|BM| = |CM| = r$ staan de lengtes van de zijden in $\triangle BCM$ vast en bepaald worden dat $|ME| = \frac{1}{3}r$ en $|EB| = \frac{2}{3}r$.

Omdat $|BM|$ de zwaartelijn van ABC is en E op deze lijn ligt met verhouding $1 : 2$ moet nu wel gelden dat E het zwaartepunt van ABC is.

Opgave 4 We noemen een natuurlijk getal een *MOAWOA*-getal als elk cijfer ongelijk aan 0 er maximaal twee keer in voor komt (in decimale schrijfwijze). Definieer S als de som van alle *MOAWOA*-getallen kleiner dan 10^{10}. Laat zien dat S deelbaar is door $10^{10} - 1$.

Oplossing We kunnen alle *MOAWOA*-getallen genereren aan de hand van de verzameling cijfers waar het uit bestaat. Bekijk een verdeling $p = (a_0, a_1, \ldots, a_9)$ waarin a_i aangeeft hoe vaak het cijfer i voor komt. Elk *MOAWOA*-getal dat deze cijfers als decimalen heeft is gelijk aan een permutatie van deze verzameling: de multinomiaalcoefficient $\binom{10}{a_0, a_1, \ldots, a_9}$.
Omdat de volgorde van de cijfers niet uitmaakt, heeft elk cijfer een identieke gemiddelde waarde van $a = \frac{0a_0 + 1a_1 + \ldots + 9a_9}{10}$. De gemiddelde waarde van een *MOAWOA*-getal met deze cijferverdeling is dus het getal bestaande uit tienmaal het cijfer a, oftewel $a\frac{10^{10}-1}{9}$. De totale som van alle *MOAWOA*-getallen met deze permutatie is het aantal getallen maal de gemiddelde waarde, oftewel:

$$\frac{10!}{a_0!a_1! \cdots a_9!} \cdot \frac{0a_0 + 1a_1 + \ldots + 9a_9}{10} \cdot \frac{10^{10} - 1}{9}$$

Noem deze waarde S_p. Merk op dat we S_p kunnen herschrijven als:

$$S_p = \frac{8! \cdot (1a_1 + \ldots + 9a_9)}{a_0!a_1! \cdots a_9!} \left(10^{10} - 1\right)$$

We onderscheiden nu drie gevallen: a_0 is 10, 9 of kleiner dan 9.

Geval 1: $a_0 = 10$. Dit geval bevat slechts één permutatie; die met alleen maar nullen. De som van alle getallen in deze permutatie is dus 0 en dat is deelbaar door $10^{10} - 1$.

Geval 2: $a_0 = 9$. In dit geval zijn er 9 nullen en een ander cijfer i. Dan is S_p gelijk aan $\frac{8! \cdot ia_i}{9!} \left(10^{10} - 1\right) = \frac{i}{9} \left(10^{10} - 1\right)$. De som van alle permutaties in dit geval is dan:

$$\sum_{i=1}^{9} \frac{i}{9} \left(10^{10} - 1\right) = \frac{\sum_{i=1}^{9} i}{9} \left(10^{10} - 1\right) = 5 \left(10^{10} - 1\right)$$

Dit is deelbaar door $10^{10} - 1$.

Geval 3: $a_0 \leq 8$. In dit geval zijn er maximaal 8 nullen. We gaan nu laten zien dat S_p deelbaar is door $10^{10} - 1$ door te laten zien dat:

$$a_0!a_1! \cdots a_9! \mid 8! \cdot (1a_1 + \ldots + 9a_9)$$

Hiervoor kijken we hoevaak elk priemgetal de linker en de rechterkant deelt. Omdat a_i maximaal 8 is voor elke i hoeven we geen rekening te houden met priemgetallen groter dan 7.

Omdat a_i maximaal 2 is voor $i > 0$ geldt dat alleen a_0 groter dan 2 kan zijn. Alleen a_0 is dus deelbaar door 3, 5 of 7. Omdat $a_0 \leq 8$ geldt dat $a_0 \mid 8!$, dus de priemgetallen 3,5 en 7 delen rechts vaker dan links.
Omdat S_p de som is van een aantal gehele getallen is het geheel. De bovenkant bevat is dus minstens even vaak deelbaar door 2 als de onderkant. Omdat $10^{10} - 1$ oneven is zitten alle priemdelers 2 in $8! \cdot (1a_1 + \ldots + 9a_9)$ dus is dat getal vaker deelbaar door 2 dan $a_0!a_1! \cdots a_9!$.
Hiermee hebben we alle priemdelers bekeken en volgt dat $a_0!a_1! \cdots a_9! \mid 8! \cdot (1a_1 + \ldots + 9a_9)$, dus S_p is in dit geval altijd deelbaar door $10^{10} - 1$, dus de som van alle S_p-tjes is dat ook.

We concluderen dat de totale som S deelbaar is door $10^{10} - 1$.

Opgave 5 Bepaal alle natuurlijke getallen $n > 0$ waarvoor de volgende stelling waar is: voor elke $k \in \mathbb{N}$ waarvoor geldt dat $n \mid k^n - 1$, geldt ook dat $n^2 \mid k^n - 1$.

Oplossing Definieer A als de verzameling van getallen waarvoor de stelling waar is. We gaan laten zien dat A alle natuurlijke getallen bevat behalve degene die deelbaar zijn door 8 of een oneven priemkwadraat. We bewijzen dit in een aantal tussenstappen.

Stap 1: priemgetallen zitten in A.
Laat een priemgetal p en een getal $k \in \mathbb{N}$ gegeven zijn waarvoor geldt dat $p \mid k^p - 1$, oftewel dat $1 \equiv k^p \mod p$. Vanwege de kleine stelling van Fermat geldt dat $k^p \equiv k \mod p$, en dus volgt dat $k \equiv 1 \mod p$ en $p \mid k - 1$. Hieruit volgt dat $k^{p-1} + k^{p-2} + \ldots + 1 \equiv 1 + 1 + \ldots + 1 = p \equiv 0 \mod p$. Omdat $k^p - 1 = (k-1)(k^{p-1} + k^{p-2} + \ldots + 1)$ is $k^p - 1$ het product van twee getallen die elk deelbaar zijn door p, dus $k^p - 1$ is ook deelbaar door p^2. Hieruit volgt dat p in A zit.

Stap 2: 1 en 4 zitten in A.
Omdat voor $n = 1$ geldt dat $n = n^2$ dus is het triviaal dat $1 \in A$.
Laat nu een $k \in \mathbb{N}$ gegeven zijn waarvoor geldt dat $4 \mid k^4 - 1$. Dan moet k oneven zijn. Daaruit volgt dat $k - 1$, $k + 1$ en $k^2 + 1$ even zijn. Het product $(k-1)(k+1)(k^2+1) = k^4 - 1$ is dus deelbaar door 8. Omdat een van de getallen $k - 1$ en $k + 1$ zelfs deelbaar is door 4, geldt dat $k^4 - 1$ deelbaar is door $16 = 4^2$. Er geldt dus dat $4^2 \mid k^4 - 1$, dus 4 zit in A.

Stap 3: Als $a, b \in A$, en $\text{ggd}(a, b) = 1$, dan $ab \in A$.
Laat zulke a, b en een $k \in \mathbb{N}$ gegeven zijn waarvoor geldt dat $ab \mid k^{ab} - 1$. Omdat $a \mid ab \mid k^{ab} - 1$ en $a \in A$, geldt dat $a^2 \mid k^{ab} - 1$. Op analoge wijze volgt dat $b^2 \mid k^{ab} - 1$. Omdat $\text{ggd}(a, b) = 1$, geldt dat $(ab)^2 | k^{ab} - 1$, dus ook ab zit in A.

Stap 4: Getallen deelbaar door oneven priemkwadraten of door 8 zitten niet in A.
Laat een n die deelbaar is door een oneven priemkwadraat of door 8 gegeven zijn. Dan kunnen we n schrijven als tp^a, waarbij p een priemgetal, t niet deelbaar door p en a minstens 2 (of minstens 3 als $p = 2$). We gaan nu laten zien dat $k = tp^{a-1} + 1$ een tegenvoorbeeld is.

We kunnen $k^n - 1$ herschrijven als $\left(tp^{a-1} + 1\right)^n - 1$. Uit het binomium van Newton volgt dat dit gelijk is aan $-1 + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i p^{i(a-1)}$. Voor elke $i \geq 2$ geldt dat de i-de term deelbaar is door $n = tp^a$. Hieruit volgt dat de som congruent is aan $-1 + \binom{n}{1} t^1 p^{1(a-1)} + \binom{n}{0} t^0 p^{0(a-1)} = -1 + ntp^{a-1} + 1 \equiv 0 \mod n$. Het getal $k^n - 1$ is dus deelbaar door n.

Voor elke $i \geq 4$ geldt dat $i(a-1) \geq 2a$ en dus dat de i-de term deelbaar is door $n^2 = t^2 p^{2a}$.
De derde term is gelijk aan $\binom{n}{3} t^3 p^{3(a-1)}$. Omdat $\binom{n}{3}$ deelbaar is door p is ook deze term deelbaar door n^2.
De tweede term is gelijk aan $\binom{n}{2} t^2 p^{2(a-1)} = \binom{tp^a}{2} t^2 p^{2a-2} = (t^3 p^{3a-2} \cdot (tp^a - 1))/2$. Als $p \neq 2$ is dit deelbaar door n^2 omdat $t^3 p^{3a-2}$ deelbaar is door n^2. Als $p = 2$ geldt dat $a \geq 3$, dus dan is $3a - 2 \geq 2a + 1$ en volgt dat $t^3 p^{3a-2}$ deelbaar door $2n^2$ en dat de tweede term deelbaar is door n^2.

Elke term in de sommatie behalve de nulde en de eerste zijn dus deelbaar door n^2. De sommatie is daarom congruent aan $-1 + ntp^{a-1} + 1 = t^2 p^{2a-1} \mod n^2$, wat niet gelijk is aan 0.

We concluderen dat $k = tp^{a-1} + 1$ inderdaad een tegenvoorbeeld is en dat getallen deelbaar door oneven priemkwadraten of door 8 niet in A zitten.