- Je hebt twee uur de tijd voor het oplossen van de vraagstukken.
- Elk vraagstuk is maximaal 10 punten waard.

μKW
28 juni 2013

Vraagstuk 1. Zij $n \geq 1$ een geheel getal. Definieer A_n als de $n \times n$-matrix waarbij het element op rij i en kolom j wordt gegeven door $(i+j-1)^2$. Bepaal voor alle n de waarde van $\det(A_n)$.

Oplossing 1. Merk op dat voor alle $k \in \mathbb{R}$ geldt dat $k^2 - 3(k+1)^2 + 3(k+2)^2 = (k+3)^2$ dus voor $n \geq 4$ geldt dat we de vierde rij kunnen schrijven als eenmaal de eerste rij min driemaal de tweede plus driemaal de derde. Nu vormen de rijen van A dus een afhankelijk stelsel en dus geldt voor $n \geq 4$ dat $\det(A_n) = 0$.
Voor $n = 1, 2, 3$ rekenen we ten slotte uit dat $\det(A_1) = 1$, $\det(A_2) = -7$ en $\det(A_3) = -8$.

Oplossing 2. Het antwoord voor $n \geq 4$ kan ook op de volgende manier bepaald worden: trek allereerst de derde rij van de vierde af, dan de tweede van de derde en ten slotte de eerste van de tweede. Aangezien dit de determinant niet verandert geldt dat

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & \cdots & (n-1)^2 & n^2 \\ 3 & 5 & \cdots & 2n-1 & 2n+1 \\ 5 & 7 & \cdots & 2n+1 & 2n+3 \\ 7 & 9 & \cdots & 2n+3 & 2n+5 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Trekken we nu de derde rij van de vierde af en dan de tweede van de derde, dan concluderen we dat

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & \cdots & (n-1)^2 & n^2 \\ 3 & 5 & \cdots & 2n-1 & 2n+1 \\ 5 & 7 & \cdots & 2n+1 & 2n+3 \\ 7 & 9 & \cdots & 2n+3 & 2n+5 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & \cdots & (n-1)^2 & n^2 \\ 3 & 5 & \cdots & 2n-1 & 2n+1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0,$$

want in de laatste determinant zijn twee rijen hetzelfde, dus is de determinant gelijk aan 0.

Vraagstuk 2. Bekijk de rij Fibonacci-getallen $F_0, F_1, F_2, \ldots$ gedefinieerd door $F_0 = F_1 = 1$ en $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ voor elke $n \geq 2$ geheel. Bepaal het kleinste gehele getal $m \geq 0$ zodat er rijen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ en $b_0, b_1, b_2, \ldots$ van niet-negatieve gehele getallen bestaan die voldoen aan:

- Voor alle $i, j \geq 0$ geheel met $i \neq j$ geldt $a_i \neq a_j$ en $b_i \neq b_j$.
- Voor elk niet-negatief geheel getal n geldt $a_n + b_n = F_{n+m}$.

Oplossing. Het antwoord is: $m = 2$. Merk op dat voor $m = 2$ de rijen $a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 1$ en $a_n = F_{n+1}$ voor $n \geq 3$ en $b_0 = 2, b_1 = 1, b_2 = 4$ en $b_n = F_n$ voor $n \geq 3$ voldoen. Dit is zo want $a_0 + b_0 = 2 = F_2$, $a_1 + b_1 = 3 = F_3$, $a_2 + b_2 = 5 = F_4$ en verder voor $n \geq 3$ geldt $a_n + b_n = F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$. Bovendien is de rij F_n stijgend vanaf $n = 1$, dus $a_i > a_j$ voor $i > j \geq 3$ en verder geldt $a_3 = 5$ en dat is groter dan a_0, a_1 en a_2. In de rij a_i komen dus geen dubbele getallen voor. Analoog geldt $b_i > b_j$ voor $i > j \geq 4$ en verder zijn ook hier b_0, b_1, b_2 en $b_3 = 3$ allemaal verschillend.

Merk verder op dat als er rijen a_i en b_j bestaan voor $m = 0$ dat dan de rijen $a'_i = a_{i+1}$ en $b'_j = b_{j+1}$ voldoen voor $m = 1$. We hoeven nu dus enkel aan te tonen dat er niet zulke rijen bestaan voor $m = 1$. Stel dat dit wel zo is. Dan weten we enerzijds dat

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 1 + 2 + 3 + 5 = 11.$$

Anderzijds geldt, aangezien a_0, a_1, a_2 en a_3 verschillend zijn, dat $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \geq 0 + 1 + 2 + 3 = 6$ en analoog $b_0 + b_1 + b_2 + b_3 \geq 6$. Dit optellen geeft

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + b_0 + b_1 + b_2 + b_3 \geq 6 + 6 = 12.$$

Dit is een duidelijke tegenspraak, dus $m = 2$ is ook daadwerkelijk de minimale waarde.

Vraagstuk 3. A-Eskwadraat heeft ongeveer 2094 leden. In deze opgave gaan wij ervan uit dat er 698 wiskunde-, 698 natuurkunde- en 698 informaticastudenten zijn en dat niemand twee of meer studies doet. A-Eskwadraat besluit een reis te organiseren, waarvan van iedere studie één student mee mag. Om te bepalen wie dat zijn en waar de reis naar toe gaat, heeft A-Eskwadraat 2094 lootjes gemaakt. Voor iedere studie worden lootjes gemaakt met daarop de getallen 0 tot en met 697 en aan elke student wordt willekeurig een lootje toegekend. Daarna wordt er per studie een lootje getrokken. De personen die bij deze lootjes horen mogen mee.
De locatie wordt bepaald aan de hand van de som van de getallen op de getrokken lootjes: in het bijzonder gaat de reis bij een som die tussen de 698 en 1045 ligt naar New York.
Een zekere student, die zijn lotnummer niet weet, hoopt naar New York te mogen. Hoe goot is de kans dat hij daadwerkelijk naar New York mag? (Je eindantwoord moet in een simpele rekenmachine in te voeren zijn, dus zonder somnotaties en dergelijke.)

Oplossing. De kans is overduidelijk gelijk aan de kans dat de reis naar New York gaat, die we met $P(\text{New York})$ noteren, vermenigvuldigd met de kans dat, gegeven dat de reis naar New York gaat, de student mee mag. Deze laatste kans is natuurlijk gelijk aan $\frac{1}{698}$, want de studenten zijn binnen elke studie willekeurig over de lootjes verdeeld.

Schrijf nu $P(n)$ voor de kans dat de som van de getallen op de getrokken lootjes gelijk is aan n. Wegens symmetrie geldt nu dat $P(k) = P(2091 - k)$ voor elke $0 \leq k \leq 2091$. In het bijzonder geldt dat

$$1 = \sum_{k=0}^{2091} P(k) = \sum_{k=0}^{1045} P(k) + \sum_{k=1046}^{2091} P(k) = \sum_{k=0}^{1045} P(k) + \sum_{k=0}^{1045} P(2091 - k) = 2\sum_{k=0}^{1045} P(k),$$

dus $\sum_{k=0}^{1045} P(k) = \frac{1}{2}$. Er geldt bovendien dat

$$P(\text{New York}) = \sum_{k=698}^{1045} P(k) = \sum_{k=0}^{1045} P(k) - \sum_{k=0}^{697} P(k) = \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{697} P(k).$$

Zij n_1, n_2 en n_3 de getallen op de getrokken lootjes bij wiskunde, natuurkunde respectievelijk informatica. Schrijf $n = n_1 + n_2 + n_3$. Gevraagd is nu $P(n \leq 697)$. Stel dat $n \leq 697$, schrijf dan $n_4 = 697 - n_1 - n_2 - n_3$, dan geldt $n_1, n_2, n_3, n_4 \geq 0$ en bovendien $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 697$. Bovendien correspondeert bij elk viertal (n_1, n_2, n_3, n_4) dat aan deze eisen voldoet ook één uniek drietal (n_1, n_2, n_3) van getrokken waarden. We gaan nu bepalen hoeveel van zulke viertallen er zijn.

We claimen dat dit gelijk is aan $\frac{700 \cdot 699 \cdot 698}{6} = \binom{700}{3}$. Bekijk namelijk 700 stippen waarvan we er 3 zwart kleuren. De stippen die we zwart kleuren kunnen we op $700 \cdot 699 \cdot 698$ manieren kiezen, maar dan tellen we elke mogelijkheid $3! = 6$ keer, want we kunnen op $3!$ de manieren de stippen in verschillende volgordes kiezen. Zij m_1 het aantal stippen tot aan de eerste zwarte stip, waarbij we vanaf links tellen en de zwarte stip niet meetellen. Verder definiëren we analoog m_2 als het aantal stippen tussen de eerste en de tweede zwarte stip, m_3 als het aantal stippen tussen de tweede en de derde en m_4 als het aantal stippen na de derde zwarte stip. Nu geldt dat

$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 700 - 3 = 697$ en bovendien zijn m_1, m_2, m_3 en m_4 niet-negatieve gehele getallen. Dit viertal (m_1, m_2, m_3, m_4) voldoet dus aan de voorwaarden. Andersom leidt elk viertal dat aan de voorwaarden voldoet tot een unieke kleuring van drie stippen, waarmee het gevraagde bewezen is.
Nu geldt dus dat

$$P(n \leq 697) = \frac{1}{698^3} \cdot \frac{700 \cdot 699 \cdot 698}{6} = \frac{350 \cdot 233}{698^2} \text{ dus } P(\text{New York}) = \frac{1}{2} - \frac{350 \cdot 233}{698^2}$$

en dus is de gevraagde kans gelijk aan $\frac{1}{698}\left(\frac{1}{2} - \frac{350 \cdot 233}{698^2}\right)$.

N.B. Een rekenmachine geeft dat de kans dat de reis naar New York gaat ongeveer gelijk is aan 0.3326 *en de kans dat de persoon bovendien mee mag ongeveer gelijk is aan* 0.0004765*.*

Oplossing 2. Voor wie van rekenen houdt: om te bewijzen dat $\sum_{k=0}^{697} P(k) = \frac{1}{698^3}\binom{700}{3}$ kan men ook als volgt redeneren. We gaan wederom het totaal aantal mogelijkheden bepalen en daarna delen door 698^3. Definieer n_1, n_2 en n_3 als in de vorige oplossing. Merk op dat n_1 elke waarde aan mag nemen, maar dat zodra n_1 vastligt, n_2 mag variëren van 0 tot $697 - n_1$, waarna n_3 mag variëren van 0 tot $697 - n_1 - n_2$. Het totaal aantal mogelijkheden is dus gelijk aan

$$\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^{697} \sum_{n_2=0}^{697-n_1} \sum_{n_3=0}^{697-n_1-n_2} 1 &= \sum_{n_1=0}^{697} \sum_{n_2=0}^{697-n_1} (698 - n_1 - n_2) \\
&= \sum_{n_1=0}^{697} \left((698 - n_1)(698 - n_1) - \frac{(697 - n_1)(698 - n_1)}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n_1=0}^{697} (698 - n_1)(699 - n_1) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n_1=0}^{697} 698 \cdot 699 - 1397 n_1 + n_1^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(698^2 \cdot 699 - 1397 \cdot \left(\frac{697 \cdot 698}{2} \right) + \frac{697 \cdot 698 \cdot 1395}{6} \right)
\end{aligned}$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de identiteiten $\sum_{k=0}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}$ en $\sum_{k=0}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$, welke beiden eenvoudig te bewijzen zijn met inductie. Het blijkt inderdaad dat

$$\frac{1}{2} \left(698^2 \cdot 699 - 1397 \cdot \left(\frac{697 \cdot 698}{2} \right) + \frac{697 \cdot 698 \cdot 1395}{6} \right) = \binom{700}{3}.$$

Vraagstuk 4. Voor een polynoom P met complexe coëfficiënten zeggen we dat $z_0 \in \mathbb{C}$ een *speciaal punt* is als er een niet-lege open verzameling $U \subset \mathbb{C}$ bestaat zodanig dat voor alle $z \in U$ geldt dat

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{P \circ \cdots \circ P}_{n}(z) = z_0.$$

Bestaat er een polynoom met meer dan één speciaal punt?

Oplossing. Ja, neem $P(z) = -2z^3 + 3z^2$. Het onderstaande lemma impliceert dat 0 en 1 speciale punten zijn:

Lemma: Zij $w \in \mathbb{C}$ en stel dat $P(w) = w$ en $P'(w) = 0$, dan bestaat er een open verzameling U die 0 bevat zodanig dat er voor alle $h \in U$ geldt dat

$$\lim_{n\to\infty} P^n(w+h) = w$$

Bewijs: Stel dat $P(w) - w = P'(w) = 0$, dan bestaan er $\epsilon, C > 0$ zodanig dat $|P(w+h) - w| \leq C|h|^2$ als $|h| < \epsilon$. Zonder verlies van algemeenheid geldt $\epsilon \leq 1/C$. We zullen met inductie bewijzen dat er voor $|h| < \epsilon$ geldt dat

$$C|P^n(w+h) - w| \leq (C|h|)^{2^n}.$$

Voor $n = 1$ is dit triviaal. Stel dat de uitdrukking klopt voor zekere n, dan impliceert $|h| < \epsilon$ dat

$$\begin{aligned} C|P^{n+1}(w+h) - w| &= C|P^n(w + (P(w+h) - w)) - w| \\ &\leq (C|P(w+h) - w|)^{2^n} \leq (C|h|)^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Hier hebben we gebruikt dat $|P(w+h) - w| \leq C|h|^2 < \epsilon$. Aangezien $C|h| < 1$ voor $|h| < \epsilon$ concluderen we dat $|P^n(w+h) - w| \to 0$ als $|h| < \epsilon$. Dit bewijst het lemma.

Heb je de smaak te pakken gekregen en wil je aan andere wiskundewedstrijden meedoen? Hier volgt een lijst van zulke wedstrijden die volgend jaar zullen plaatsvinden. Houd hiervoor de site van A-Eskwadraat in de gaten:

- De MOAWOA (Mathematical Olympiad for all), Utrecht, www.a-eskwadraat.nl/moawoa
- De PUMA (Pure Mathematical Olympiad), Gent, http://prime.ugent.be/activiteiten/puma
- LIMO (Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade)