- Je hebt twee uur de tijd voor het oplossen van de vraagstukken.
- Elk vraagstuk is maximaal 10 punten waard.

μKW
13 juni 2014

Vraagstuk 1. Bekijk een rijtje gehele getallen (waarnemingen) $x_1, \ldots, x_n$. De (steekproef)variantie van $x_1, \ldots, x_n$ is gedefinieerd als $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ met $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ het gemiddelde van $x_1, \ldots, x_n$. Bewijs dat als $n = 3$ de variantie van $x_1, \ldots, x_n$ geheel is dan en slechts dan als het gemiddelde van $x_1, \ldots, x_n$ geheel is. Bewijs bovendien dat er geen enkele $n > 3$ bestaat waarvoor dit waar is.

Vraagstuk 2. We bekijken reële getallen x, y, z en schrijven

$$V = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

(a) Bewijs dat $\dim(V) < 3$ dan en slechts dan als $(x+y+z)((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2) = 0$.

(b) Bepaal alle mogelijke waarden van $\dim(V)$ en bepaal alle drietallen (x, y, z) waarvoor deze dimensies worden aangenomen.

Vraagstuk 3. We hebben 2014 fiches, elk met een rode kant en een blauwe kant. We maken als volgt een rij met deze 2014 fiches: het eerste fiche leggen we met de rode kant boven neer en leggen we op de eerste positie in de rij. Als we op een gegeven moment een rij van n fiches hebben, waarvan k met de rode kant boven, dan werpen we met kans $\frac{k}{n}$ het volgende fiche en met kans $1 - \frac{k}{n}$ leggen we het fiche neer met de rode kant boven. Als we een fiche werpen is de kans dat de rode kant boven komt te liggen gelijk aan $\frac{1}{2}$ en evenzo voor de blauwe kant. Het nieuwe fiche leggen we op positie $n+1$ in de rij. Dit doen we net zo lang totdat alle 2014 fiches op tafel liggen. Als gegeven is dat er exact één blauw fiche op tafel ligt, bewijs dan dat de verwachtingswaarde van de positie van dit fiche gelijk is aan

$$\frac{2013}{\sum_{n=2}^{2014}\frac{1}{n}}.$$

N.B. deze verwachtingswaarde is bij benadering gelijk aan 280.15.

Vraagstuk 4. Bestaat er een continue functie $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ zodat voor elke $r \in \mathbb{R}$ er een rij getallen $(x_n)_{n\geq 1}$ in $(0,1)$ bestaat met $x_n \to 0$ voor $n \to \infty$ en $f(x_n) \to r$ voor $n \to \infty$?