- Je hebt twee uur de tijd voor het oplossen van de vraagstukken.
- Elk vraagstuk is maximaal 10 punten waard.

μKW
6 januari 2012

Vraagstuk 1.
Zij $n \in \mathbb{N}$ en definieer A als de $n \times n$-matrix met entries $A_{ij} = 0$ als $i = j$ en anders $A_{ij} = 1$. Bereken $\det A$.

Oplossing. Uitrekenen geeft dat $\det A$ gelijk is aan $0, -1$ en 2 voor $n = 1, n = 2$ en $n = 3$ respectievelijk. We vermoeden dat $\det A = (-1)^{n+1}(n-1)$. Stel dat dit waar is voor zekere $n \geq 2$. Beschouw dan de determinant van de $(n+1) \times (n+1)$ matrix A. We kunnen de bovenste rij vermenigvuldigen met $n-1$ en dan alle andere rijen daarvan aftrekken. Dit geeft

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{n-1} \det \begin{pmatrix} 0 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{n-1} \det \begin{pmatrix} -n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \frac{-n}{n-1}(-1)^{n+1}(n-1) = (-1)^{n+1+1}(n+1-1)$$

en ons vermoeden is dus bewezen per inductie.

Vraagstuk 2.
Kies willekeurig een $x \in (0,1)$ en rond $\log(x)$ af op het dichtstbijzijnde gehele getal. Wat is groter: de kans dat $\log(x)$ naar boven wordt afgerond of de kans dat $\log(x)$ naar beneden wordt afgerond?

Oplossing. $\log(x)$ wordt naar beneden afgerond precies als er een negatief geheel getal n bestaat zodanig dat $n < \log(x) \leq n + \frac{1}{2}$, ofwel als $e^n < x \leq e^n\sqrt{e}$. De kans dat $\log(x)$ naar beneden wordt afgerond is dus

$$\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-n}\sqrt{e} - e^{-n}) = (\sqrt{e} - 1)\frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{\sqrt{e}+1} < \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}+1}.$$

De kans dat $\log(x)$ naar boven wordt afgerond is dus groter.

Vraagstuk 3.
Vergelijk de cardinaliteiten van $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Opmerking: $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ is gedefinieerd als de verzameling $\{(a_1, a_2, \ldots) | \forall i \in \mathbb{N} : a_i \in \mathbb{N}\}$.

Oplossing 1. We zullen aantonen dat hun cardinaliteiten gelijk zijn. De makkelijkste manier om zoiets te doen is door de Schröder-Bernsteinstelling toe te passen. Beschouw de functie $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ met het functievoorschrift

$$f(A) = (2^{n_1(A)}, 2^{n_2(A)}, \ldots)$$

waarbij $n_i(A)$ gelijk is aan 1 wanneer $i \in A$ en anders aan 0. Het is duidelijk dat $f(A) = f(B)$ impliceert dat $n_i(A) = n_i(B)$ voor alle $i \in \mathbb{N}$ en dat betekent dat $A = B$. We concluderen dus dat f injectief is. Laat ons nu proberen een injectieve functie te vinden van $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ naar $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. De verzameling van priemgetallen is een deelverzameling van $\mathbb{N}$ en is dus aftelbaar. We kunnen de priemgetallen dus labelen als $p_1, p_2, \ldots$. Beschouw nu de functie $g : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ met het functievoorschrift

$$g(a_1, a_2, \ldots) = \{p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \ldots\}.$$

Deze functie is duidelijk injectief. We concluderen dat $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$.

Oplossing 2. Het is bekend dat $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| = |(0, 1)|$. Het is daarom voldoende om aan te tonen dat $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |(0, 1)|$. Beschouw de functie $f : (0, 1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ met het functievoorschrift

$$f(0, a_1 a_2 \ldots) = (a_1 + 1, a_2 + 1, \ldots).$$

Het is duidelijk dat deze functie injectief is. Beschouw nu de functie $g : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to (0, 1)$ met het functievoorschrift

$$g(a_1, a_2, \ldots) = 0, b_1 a_1 b_2 a_2 \ldots$$

Hier is b_i een uitdrukking die bestaat uit alleen maar nullen, het aantal nullen is gelijk aan het aantal cijfers van a_i. Ook deze functie is injectief. De Schröder-Bernsteinstelling impliceert dat $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |(0, 1)| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Vraagstuk 4.
Vind alle $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ zodanig dat $3 \cdot 2^x = y^3 + 5y + 6$.

Oplossing. Stel dat we een oplossing $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ hebben van de vergelijking. Het is duidelijk dat x niet negatief kan zijn want de rechterkant van de vergelijking is altijd geheel, dus $x \geq 0$. Als $y \leq -1$ dan geldt $y^3 + 5y + 6 = y(y^2 + 5) + 6 \leq -1(1 + 5) + 6 \leq 0$. We concluderen dat $y \geq 0$. We merken op dat $y^3 + 5y + 6 = (y+1)(y^2 - y + 6)$. Uit de priemfactorisatie volgt dat $y + 1 = 3 \cdot 2^k$ voor zekere $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ of dat $y + 1 = 2^k$ voor zekere $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Laten we het eerste geval beschouwen. Dan geldt

$$y^2 - y + 6 = (y + 1)^2 - 3(y + 1) + 8 = 9 \cdot 2^{2k} - 9 \cdot 2^k + 8 = 2^l$$

voor zekere $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Invullen geeft dat $k = 1$ en $k = 2$ niet werken en dat $k = 0$ en $k = 3$ leiden tot de oplossingen $(x, y) = (3, 2)$ en $(x, y) = (12, 23)$ respectievelijk. Als $k \geq 4$ dan volgt een contradictie want

$$2^l = 8(9 \cdot 2^{2k-3} - 9 \cdot 2^{k-3} + 1).$$

en het getal tussen haakjes is oneven en groter dan 1. We beschouwen nu het tweede geval. Dan geldt

$$y^2 - y + 6 = (y + 1)^2 - 3(y + 1) + 8 = 2^{2k} - 3 \cdot 2^k + 8 = 3 \cdot 2^l$$

voor zekere $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Invullen geeft dat $k = 0, k = 1, k = 2$ en $k = 3$ leiden tot de oplossingen $(x, y) = (1, 0), (x, y) = (2, 1), (x, y) = (4, 3)$ en $(x, y) = (7, 7)$ respectievelijk. Als $k \geq 4$ dan volgt uit

$$3 \cdot 2^l = 8(2^{2k-3} - 3 \cdot 2^{k-3} + 1).$$

dat $2^{2k-3} - 3 \cdot 2^{k-3} + 1 = 3$. Maar dat is een contradictie want

$$2^{2k-3} - 3 \cdot 2^{k-3} + 1 = 2^{k-3}(2^k - 3) + 1 \geq 2 \cdot 13 + 1 > 3.$$

We concluderen dat de volledige oplossingsverzameling wordt gegeven door

$$\{(1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (7, 7), (12, 23)\}.$$

Heb je de smaak te pakken gekregen en wil je aan andere wiskundewedstrijden meedoen? Hier volgt een lijst van zulke wedstrijden:

- De MOAWOA (Mathematical Olympiad for all), Utrecht 10 februari 2012, www.a-eskwadraat.nl/moawoa
- De PUMA (Pure Mathematical Olympiad), Gent (datum nog niet bekend), http://prime.ugent.be/activiteiten/puma
- LIMO (Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade), Utrecht 25 mei 2012
- IMC (International Mathematics Competition), Bulgarije 26 juli t/m 1 augustus, www.imc-math.org