Klein Kampioenschap Wiskunde
2018-2019

- Je hebt 2 uur de tijd.
- Elke opgave moet op een apart blad worden ingeleverd.
- Elke opgave is 10 punten waard.

Opgave 1 Voor de volgende matrices M toon aan dat er voor alle gehele $n \geq 1$ een reële matrix A bestaat zodat $A^n = M$.

(a) (3pt) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) (7pt) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Opgave 2 Henk de Steen heeft n vrienden die uniform willekeurig verdeeld zijn over elkaars huizen. Henk zoekt naar Hannah de Rots en begint bij haar huis. Elke keer dat Henk een huis bezoekt vindt hij een vriend en is het volgende huis dat hij bezoekt het huis van die vriend. Toon aan dat Henk een uniform willekeurig aantal vrienden tegen komt voordat hij Hannah vindt.

Opgave 3
(a) (5pt) Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differentieerbaar met $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Laat zien dat hieruit volgt dat $\lim_{x\to\infty} f(x+1) - f(x) = 0$.
(b) (5pt) Zij $f : \mathbb{R}_{>1} \to \mathbb{R}$ met $f(x) = \frac{x}{\log x}$[1]. Toon aan dat $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$, maar ook $\lim_{x\to\infty} f(x + \log x) - f(x) \neq 0$.

Opgave 4 We noemen een verzameling $U \subseteq \mathbb{R}$ convex als voor alle $a, b \in U$ met $a < b$ geldt $[a, b] \subseteq U$. We noemen U halverwege convex als voor alle $a, b \in U$ geldt $\frac{a+b}{2} \in U$.
(a) (2pt) Zij $I := \{0 \leq x \leq 1 : x \text{ heeft een eindige binaire expansie}\}$. Leg kort uit waarom I halverwege convex, maar niet convex is en waarom I dicht[2] ligt in $[0, 1]$.
(b) (2pt) Zij $U \subseteq \mathbb{R}$ halverwege convex en zij $a, b \in U$ met $a < b$. Toon aan dat $a + (b - a)I \subseteq U$. Merk op dat je hier zonder verlies van algemeenheid kunt aannemen dat $a = 0$ en $b = 1$.
(c) (1pt) Zij $U \subseteq \mathbb{R}$ gesloten en halverwege convex. Toon aan dat U convex is.
(d) (5pt) Zij $U \subseteq \mathbb{R}$ open en halverwege convex. Toon aan dat U convex is.

[1] Hier staat $\log x$ voor de natuurlijke logaritme van x.
[2] Een verzameling A ligt dicht in B als B bevat is in de afsluiting van A.