Klein Kampioenschap Wiskunde
2018-2019
Antwoorden

Opgave 1 Voor de volgende matrices M toon aan dat er voor alle gehele $n \geq 1$ een reële matrix A bestaat zodat $A^n = M$.

(a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Oplossing 1
(a) Voor $a \in \mathbb{R}$ volgt uit inductie dat

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Met $a = 1/n$ hebben we dus een oplossing.
(b) Voor $a, b \in \mathbb{R}$ volgt uit inductie dat

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na & nb + \frac{n(n-1)}{2}a^2 \\ 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Met $a = 1/n$ en $b = \frac{n+1}{2n^2}$ hebben we dus een oplossing.

Opgave 2 Henk de Steen heeft n vrienden die uniform willekeurig verdeeld zijn over elkaars huizen. Henk zoekt naar Hannah de Rots en begint bij haar huis. Elke keer dat Henk een huis bezoekt vindt hij een vriend en is het volgende huis dat hij bezoekt het huis van die vriend. Toon aan dat Henk een uniform willekeurig aantal vrienden tegen komt voordat hij Hannah vindt.

Oplossing 2 Er zijn $n!$ mogelijke verdelingen van de vrienden over de huizen. Als Henk k vrienden tegen komt voordat hij Hannah vindt, dan zijn er $\binom{n-1}{k}$ mogelijke keuzes voor die k vrienden, er zijn $k!$ mogelijke volgordes waarin Henk deze vrienden tegen kan komen en er zijn $(n-1-k)!$ mogelijke verdelingen van de overige vrienden over elkaars huizen. Dit geeft $\binom{n-1}{k}k!(n-1-k)! = (n-1)!$ mogelijkheden in totaal. De kans hierop is dus $(n-1)!/n! = 1/n$.

Opgave 3
(a) Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differentieerbaar met $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Laat zien dat hieruit volgt dat $\lim_{x\to\infty} f(x+1) - f(x) = 0$.
(b) Zij $f : \mathbb{R}_{>1} \to \mathbb{R}$ met $f(x) = \frac{x}{\log x}$[1]. Toon aan dat $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$, maar ook $\lim_{x\to\infty} f(x+\log x) - f(x) \neq 0$.

Oplossing 3
(a) Uit $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ volgt $\limsup_{x\to\infty} |f'(x)| = 0$. Per middelwaardestelling geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$ dat er een $x \leq y \leq x+1$ bestaat zodat $|f(x+1) - f(x)| = |f'(y)|$, dus $|f(x+1) - f(x)| \leq \sup_{y\geq x} |f'(y)|$. Er volgt dat $\limsup_{x\to\infty} |f(x+1) - f(x)| \leq \limsup_{x\to\infty} |f'(y)| = 0$, dus $\lim_{x\to\infty} f(x+1) - f(x) = 0$.
(b) Uit de quotiëntregel volgt dat $f'(x) = \frac{\log x - 1}{\log^2 x} = \frac{1}{\log x} - \frac{1}{\log^2 x}$. Omdat $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$, geldt dus $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

Per fundamentele stelling van de calculus geldt voor $x \in \mathbb{R}_{>1}$ dat

$$f(x+\log x) - f(x) = \int_x^{x+\log x} \frac{1}{\log t} - \frac{1}{\log^2 t} \mathrm{d}t.$$

Er geldt dus

$$f(x+\log x) - f(x) \geq \log x \cdot \min_{x\leq t\leq x+\log x} \left(\frac{1}{\log t} - \frac{1}{\log^2 t} \right) \geq \frac{\log x}{\log(x+\log x)} - \frac{\log x}{\log^2 x}.$$

Voor $x > 2$ geldt $\log(x+\log x) < \log(2x) = \log 2 + \log x < 2\log x$, dus $\frac{\log x}{\log(x+\log x)} > \frac{1}{2}$. Voor $x > e^3 > 2$ geldt dus $f(x+\log x) - f(x) > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, dus $\lim_{x\to\infty} f(x+\log x) - f(x) \neq 0$.

Merk op dat met een soortgelijk argument en de knijpstelling zelfs kan worden bepaald dat $\lim_{x\to\infty} f(x+\log x) - f(x) = 1$.

Opgave 4 We noemen een verzameling $U \subseteq \mathbb{R}$ convex als voor alle $a, b \in U$ met $a < b$ geldt $[a,b] \subseteq U$. We noemen U halverwege convex als voor alle $a, b \in U$ geldt $\frac{a+b}{2} \in U$.
(a) Zij $I := \{0 \leq x \leq 1 : x \text{ heeft een eindige binaire expansie}\}$. Leg kort uit waarom I halverwege convex, maar niet convex is en waarom I dicht[2] ligt in $[0,1]$.
(b) Zij $U \subseteq \mathbb{R}$ halverwege convex en zij $a, b \in U$ met $a < b$. Toon aan dat $a + (b-a)I \subseteq U$. Merk op dat je hier zonder verlies van algemeenheid kunt aannemen dat $a = 0$ en $b = 1$.
(c) Zij $U \subseteq \mathbb{R}$ gesloten en halverwege convex. Toon aan dat U convex is.
(d) Zij $U \subseteq \mathbb{R}$ open en halverwege convex. Toon aan dat U convex is.

Oplossing 4
(a) Delen door twee behoudt de eigenschap van een eindige binaire expansie. Getallen met oneindige binaire expansie zoals 1/3 missen voor I om convex te zijn. Elk getal in $[0,1]$ kan benaderd worden vanuit I door de binaire expansie steeds verder te ontwikkelen.
(b) Dit volgt uit sterke inductie op de index van de laatste 1 in de binaire expansie van $x \in I$. Als deze index k is, dan geldt namelijk

$$x = \frac{(x - 2^{-k}) + (x + 2^{-k})}{2}$$

[1]Hier staat $\log x$ voor de natuurlijke logaritme van x.
[2]Een verzameling A ligt dicht in B als B bevat is in de afsluiting van A.

en zowel $x - 2^{-k}$ als $x + 2^{-k}$ hebben een lagere index van de laatste 1 in hun binaire expansies.
(c) Zij $a, b \in U$ met $a < b$. Omdat U halverwege convex is geldt dus $a + (b - a)I \subseteq U$. Omdat I dicht ligt in $[0, 1]$ en omdat U gesloten is geldt dus $[a, b] = a + (b - a)[0, 1] \subseteq U$.
(d) We bewijzen vanuit het ongerijmde. Stel U is niet convex. Dan zijn er dus $a, b \in U$ met een $a < c < b$ waarvoor $c \notin U$. We nemen zonder verlies van algemeenheid aan dat $c = 0$ en $a+b > 0$. Omdat U open is, bestaat er een $\varepsilon > 0$ zodat $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq U$. Omdat U halverwege convex is, maar $c = 0 \notin U$ volgt er dat $(-a - \varepsilon, -a + \varepsilon) \cap U = \emptyset$. Omdat $a < -a < b$ ligt U dus niet dicht in $[a, b]$. Dit is een tegenspraak met $a + (b - a)I \subseteq U$, dus U moet wel convex zijn.